数学の基礎：実数・複素数・四元数

サンマヤ

平成 24 年 5 月 3 日

目次

序文

90 年代中盤、私がまだ大学生 1 年生だったころ、共通過程の線形代数の授業。担当の教授は変わったことばかり言うひとでしたが、その中で一番印象に残っている言葉があります。それは、「複素数というのは、ある夜、屋上から、広がりたい、広がりたい、という数の声がきこえてできたのです」、というものでした。「面白い先生だなあ」と思ったものですが、その教授が世界で数人しかいないワイルによる「フェルマーの定理」の証明を検証できる数学者ということを知ったのはもう少しあとのことでした（すぐ後、教授は別の大学に移ってしまったのですが）。

この文章の目的は、大きく二つあります。 1 つ目は、数学の基本にある実数論についての解説することです。高校の数学では実数というものが最初から与えられていて、それを有理数と無理数に分ける、というような説明がなされます。しかし、これではきちんと「実数」というものが何なのかを定義してはいません。そこで、自然数から出発して、有理数、実数と「数が広がっていく」過程を解説していきたいと思います。

2 つ目は、さらに進んで、実数から虚数・複素数へと広がっていく過程をみることです。ここには代数学の基本定理の解説も含まれることでしょう。そして、虚数単位 i とは一体何者なのか、という問いへの一つの答えへと迫ってみたいと思います。さらには、その先にある「四元数」について考えます。物理学においてその名を残すハミルトンがその生涯をささげた「四元数」とはどういうものか。複素数の先にあるものとしての四元数を考えます。

なぜ四元数なのか、という理由は 2 つあります。一つは、DirectX などでも四元数を用いた回転の表現が使われていることです。おそらく、四元数がいったいどういうものなのか、理解して使っている人はほんの一握りだと思います。

もう一つの理由はこのサイトにこういった文章を載せていこうと思った動機の一つでもあります。それは量子力学で出てくるパウリ行列とは何者なのか？ということです。四元数とパウリ行列に関係があるのではないか、「因数分解」できるとはどういうことなのか、ということを考えてみたいと思います。

おそらく、今回の一連の記事では、四元数とパウリ行列の関係まで到達できないでしょう。そこまでいくにはさまざまな数学的な道具立てが必要になってきます。ですが、その入り口にある考え方については見ることができると思っています。

これは、今後書いていこうと考えている数学・物理学の準備的な文章です。ここでは解析学と代数学、双方の土台部分を概観することができればと考えています。一応、高校レベルの数学から理解できるように書くつもりです。高校レベルの数学に出てくることは省略することもあると思いますので、分からないことは高校の数学の教科書や最近増えている「今からやりなおす○○」のような本で勉強することをお勧めします。

第1章　実数論

1.1　数を数える

キーワード：集合、濃度、自然数、可算無限

第1回は、数を数えること、について考えてみたいと思います。そのためには、数学の対象としての「集合」とその個数、最初の「数」の概念としての自然数についてみていきます。

1.1.1　集合

数学はいろいろな＜もの＞を対象にしています。それは数であったり、図形であったり、ある操作であったり、数と数の関係であったりするわけです。それに対応して、数論、幾何学、代数学、関数論（解析学）といった分野があります。

まず、いまやろうとしている数学が何を対象としているのか。これを明らかに定義していおくことが必要です。そのための概念が**集合**というものです。

集合は「ものの集まり」です。集合に含まれているものを**要素**と呼びます。あるもの x が集合 A の要素であるとき、x は A に**属する**、といい、$x \in A$ と書きます。

集合の表現方法としてはまず集合に含まれるものを列挙するやり方があります。たとえば、

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{\text{点 A, 点 B, 点 C, 点 D}\}$$

$$D = \{\text{椅子, 机, 本棚}\}$$

のようなもの、すべてを集合とよぶことことができます。

また、数の範囲や条件を示した定義方法もあります。

$$E = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 3\} \text{ (-1 以上 3 以下の実数)}$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ (半径 1 の円の内部にある点)}$$

$$G = \{n \in \mathbb{N} | 60 \text{ は n に割り切られる }\} \text{(60 の約数)}$$

$$H = \{x^2 + 1 | -1 \leq x \leq 3\} \text{ (} -1 \leq x \leq 3 \text{ における } x^2 + 1 \text{ の値域、すなわち 1 以上 10 以下の実数)}$$

これから先、いろいろな集合が出てくるでしょう。その要素は何も数や空間上の点に限りませんが、それについては出てきたところで話していきましょう。

和・積・部分集合　ここでいくつかの用語と記号を定義しておきます。（このあたりは高校数学でも出てくるのでさらっと流してもらっていいです）

まずは集合の和と積です。

集合の**和**とは、２つ（あるいはそれ以上）の集合をあわせたもので、$A \cup B$ と書きます。集合の言葉で定義すれば、

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$$

たとえば上の例ですと、

$$A \cup B = \{1, 2, , 3, 4, 5, 7\}$$

です。

集合の**積**とは、２つ（あるいはそれ以上）の集合の共通部分で、$A \cap B$ と書きます。定義を書くと、

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

上の例では、

$$A \cap B = \{2, 3, 5\}$$

です。

何も要素を持たない集合もあります。これを**空集合**（くうしゅうごう）といい、$\emptyset$ と書きます。($\emptyset$ は 0 に斜線。本によってはギリシア文字の ϕ(ファイ）を使う場合もあります)

たとえば集合 A と B が共通部分を持たない場合、$A \cap B = \emptyset$ と書きます。

言葉の定義が続いて大変ですが、次は部分集合です。集合 A の要素がすべて集合 B に含まれるとき、A は B に**含まれる**、あるいは A は B の**部分集合**である、といい、$A \subseteq B$ とかきます。

もし $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ ならば、$A = B$ です。$A \subseteq B$ ではあるが $B \subseteq A$ ではないとき、A は B の**真の部分集合**といい $A \subset B$ と書きます。また空集合 $\emptyset$ はすべての集合の部分集合ということにしておきます。

真の部分集合はもとの集合より小さい、というのは有限集合のときだけです。無限集合のときはまた違ってきますが、それについてはまた後ほど説明したいと思います。

最後はべき集合です。集合の要素が集合になっている場合もあります。**べき集合**はその一つで、集合 A のすべての部分集合の集合で、$\mathcal{P}(A)$ あるいは 2^A と書きます。なんでこのような書き方になるのかは次の節で説明します。

1.1.2　集合を数える

これからみていくさまざまな集合において、その集合に含まれる要素の個数が問題になってきます。集合 A に含まれる要素の個数を、その集合の**濃度**といい、$n(A)$ と書きます。

上の例ならば、$n(A) = 5$ とか $n(A \cap B) = 3$ などとなります。

ですが、その後の例で、ある範囲の実数や平面上の領域のような集合もでてきます。これは無限に多くの要素をもっており、それを数えるのは難しそうです。

いきなり実数などを考えるのは難しいですから順番に考えていきたいと思いますが、その前に一般論として無限の要素をもつ２つの集合の濃度を比べる方法について解説しておきましょう。

その方法は「玉入れ」方式です。運動会の玉入れでは、１つ、２つと数えながら中身を取り出していき、先にどちらかがなくなったらそのほうが少なく、同時ならば同じ、ということになります。

もちろん、無限大ですからなくなるということはありません。そこで少し道具を用意しておきます。

写像　集合と集合の間の写像について、以下の用語を定義しておきましょう。

集合 A の要素と集合 B の要素を対応づける規則 f を A から B への**写像**といい、$f : A \to B$ とかきます。

もし、写像 f が 1 対 1、つまり A の要素 x, y について必ず $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ となるとき、f は**単射**であるといいます。

また、写像 f がすべての B の要素を網羅するとき、つまり、任意の $y \in B$ についてかならず $f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在するとき、f は**全射**であるといいます。

そして、単射かつ全射のとき、f は**全単射**であるといいます。

こういった言葉を使うならば、玉入れ方式は、「無限集合 A と B の間に全単射 f を作ることができるとき $n(A) = n(B)$ である」ということになります。

この定義を自然な定義と感じることができるでしょうか。ある意味、自然な定義といえるでしょう。ですが、そこから導き出される結論が自然であるとは限りません。それが今回の最終的な話題になります。

この節の最後に、有限集合のべき集合の濃度について触れておきましょう。

たとえば、$A = \{1, 2, 3\}$ としたとき、そのべき集合は、

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

であり、その要素は $2^3 = 8$ 個になります。これが「べき」集合と呼ばれる理由です。このことは高校の「場合の数・確率」の範囲の知識で証明できます（いくつか方法がありますが二項定理を使うのが一般的でしょうか）ので各自やってみてください。

1.1.3　自然数

やっと数の話に入れます。まずはものの個数としての**自然数**です。

自然数に 0 を含めるかどうかはまちまちですが、ここでは 0 も含めて自然数ということにしましょう。

ここでは、自然数は 1 個、2 個と数えるという、もっとも基本的な人間の思考からきた概念、ということにしておきます。数学的には、「公理論的数論」というのがあり、公理（ルール）から出発して自然数やその上での計算を定義していくやり方もあります。しかし、それはあまりにも遠回りになってしまいますので、自然数とその計算については深く掘り下げずに進めようと思います。

記号を定義しておきます。

$$N = \{(0\text{ を含めた})\text{ 自然数 }\}$$

$$N^+ = \{\text{ 正の自然数 }\}$$

$$Z = \{\text{ 整数 }\}$$

N あるいは N^+ の要素を適当に 2 つ持ってきて、これを足し算あるいは掛け算すると、その結果はやはり N あるいは N^+ の要素になります。このとき、N や N^+ は和（積）について**閉じている**、といいます。

ところが、引き算についてはこれが成り立ちません。$2 - 3$ は N の要素ではないからです。

そこで 0 より小さい数、負の数を含めた**整数**を考えることができます。整数は差についても閉じている、ということができます。

基本の計算としては、あとは割り算が残っていますが、整数は割り算について閉じていません。たとえば $2 \div 3$ は整数ではありません。これは次回でのテーマにしたいと思います。

ここでは、自然数の個数 (濃度）について考えたいと思います。

もちろん、自然数や整数は無限集合ですので、「玉入れ方式の出番です。

そこでまず、自然数 N とその部分集合である偶数 E の個数を比べてみましょう。具体的には次のような集合です。

$$N = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

$$E = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$$

ここですぐに分かるとおり、N から E への写像 $f : x \to y = 2x$ を考えれば、これは N と E の間の全単射になっています。つまり、**自然数と偶数の個数（濃度）は同じ**、ということになります。

感覚的にはこれは変ですね。偶数は自然数の真の部分集合です。たとえば、3 は自然数ですが偶数ではありません。自然数のほうが偶数より多いような気がします。しかし、無限個を比較する方法として「玉入れ方式」を採用した以上、この 2 つの集合は同じ個数である、となるのです。

同様に、整数 Z と自然数 N を比べたとき、Z を次のようにならべてみます。

$$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$$

こうすると、整数を順番にならべることができ、これを自然数と対応させることができますので、整数と自然数も同じ個数ということになります。

この例に限らず、ある無限集合を、順番に列挙することができる場合、その順番と自然数を対応させることで全単射を作ることができますから、その集合と自然数は同じ個数ということになります。このような無限集合の濃度を**可算無限**、あるいは**可付番無限**、と呼びます。

可算無限は一番基本となる無限大です。よく積分などで「たかだか可算個の点」という言葉がでてきます。「たかだか 2 個」なら「0 個から 2 個まで」ですが、「たかだが可算個」というのは「0 個から可算無限個まで」を指します。

先に結論をいってしまうと、実数は可算無限ではありません。まずはそのことへ到達することを目標に進めていきたいと思います。

1.1.4　次回予告

今回、整数の計算で深く考えなかったものがあります。それは割り算です。割り算について閉じた「数」を考えるには「有理数」が必要です。次回はこの有理数について考えていきたいと思います。

1.2　数を広げていく - 有理数

キーワード : 有理数、小数、稠密

1.2.1　割り算と逆数

前回、整数が和・差・積について閉じていることまでをみました。そして残っている計算は割り算です。

一般に、1 は 1 以外の数字で割り切ることはできません。そこで、ある整数 n について、その整数と掛けると 1 になるような数を**逆数**とし、$\frac{1}{n}$ と書くことにします。そして、一般の商 $n \div m$ を

$$n \div m = n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$$

と分数で定義します。ここで n と m に公約数があった場合、$\frac{n}{m}$ はほかの整数の商で表すことができます。

たとえば、$n = n'p, m = m'p$ と書ける時 (p は 2 以上の自然数)、これは**約分**でき、

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$$

です。これ以上約分できないとき、その分数は**既約**であるといいます。

分数で表すことのできる数を**有理数**といいます。有理数の集合は $\mathbb{Q}$ と書きます。

有理数の計算についての説明は不要でしょう。

1.2.2 小数で表す

有理数の重要な性質として、**小数**で表すことができる、ということがあります。

当たり前のことと思うかもしれませんが、中学・高校の教科書で有理数と無理数を分けるポイントになっていますので、ちゃんと見ておきましょう。

たとえば、$1 \div 4$ を小数であらわすことを考えます。

$$
\begin{aligned}
1 \div 4 &= 0 \cdots 1 && \text{(あまりの 1 を 10 倍する)} \\
10 \div 4 &= 2 \cdots 2 && \text{(あまりの 2 を 10 倍する)} \\
20 \div 4 &= 5 && \text{(割り切れた)}
\end{aligned}
$$

以上のような計算の結果、$\frac{1}{4} = 0.25$ となります。

割り切れない割り算の場合もあります。たとえば、

$$
\begin{aligned}
3 \div 7 &= 0 \cdots 3 && \text{(あまりの 3 を 10 倍する)} \\
30 \div 7 &= 4 \cdots 2 && \text{(あまりの 2 を 10 倍する)} \\
20 \div 7 &= 2 \cdots 6 && \text{(あまりの 6 を 10 倍する)} \\
60 \div 7 &= 8 \cdots 4 && \text{(あまりの 4 を 10 倍する)} \\
40 \div 7 &= 5 \cdots 5 && \text{(あまりの 5 を 10 倍する)} \\
50 \div 7 &= 7 \cdots 1 && \text{(あまりの 1 を 10 倍する)} \\
10 \div 7 &= 1 \cdots 3 && \text{(あまりの 3 はすでにでてきている)}
\end{aligned}
$$

一般に、自然数 n で割ったあまりは $n-1$ 以下の自然数であり、多くても n 回割り算を繰り返せば同じあまりが出てきます。よって、割り切れない場合でも有限個の数字を繰り返す**循環小数**であらわすことができます。今の場合、

$$\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$$

と書きます。

よって、すべての有理数は有限回で割り切れるか、有限個の数字列が繰り返す循環小数のどちらかで表すことができます。

この表現には一つやっかいな性質があります。それは一意ではない、ということです。たとえば、

$$x = 0.999999 \cdots = 0.\dot{9}$$

を考えます。これは、

$$
\begin{aligned}
10x &= 9.99999 \cdots && \text{両辺から x を引くことによって} \\
9x &= 9 && \text{よって} \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

よって $0.9999 \cdots = 1$ です。これはいろいろな証明で問題になりますが、注意だけしておきます。

1.2.3　有理数の濃度

つぎに有理数の濃度を考えます。

ある無限集合を決まった順番にならべることができれば、それは自然数と同じ濃度、可算無限となるのでした。

有理数 $\frac{n}{m}$ には、$m+n=l$ が小さい順、そして m が小さい順にならべます。そして、約分できるものを消します。

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \left(\frac{0}{2}\right), \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \left(\frac{0}{3}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \frac{1}{3}, \left(\frac{0}{4}\right), \cdots$$

これで有理数に順番付けができました。よって

$$n(\mathbb{Q}) = n(\mathbb{N})$$

です。

この順序付けはいわゆる大小関係とは違います。しかし、整数同様、有理数には大小関係＝順序を定義することができます。この点には深く立ち入りませんが、このような集合を**順序集合**といいます。

1.2.4　有理数は詰まっている

整数から拡張して有理数を作ったわけですが、これはどのくらい拡張されたのでしょうか。

数直線を考えたとき、有理数がそれをどのくらい埋め尽くすか考えます。

いま、適当な相異なる 2 つの有理数 x< y をとってきます。このとき $x<z<y$ となる有理数 z が必ず存在します。(たとえば $z=\dfrac{x+y}{2}$ をとることができます)

このように、ある（順序が定義された）集合の異なる 2 つの要素を取り出したとき、必ずその間にも要素があるとき、その集合は**稠密**である、といいます。ぎっしりつまっている、という意味です。

1.2.5　有理数の隙間

では、有理数はぎっしりつまっているということは、隙間はないのでしょうか？

そうではありません。有理数にはない数、というのを考えることができます。たとえば $x^2=2$ という数を考えますと、これは有理数ではありません。この証明は中学の教科書にも書いてあることなので割愛します。

同じような有理数でない数はいくらでも考えることはできます。それはこのような平方根（一般に累乗根）であらわされる数だけではありません。円周率 π や自然対数の底 e は、有理係数の方程式の解にはなっていません。

このように、有理数でない数をたくさん考えることはできます。では、どうやってこの有理数ではない数、をきっちりと考えることができるでしょうか。これが次回のテーマ、「実数の構成」です。

1.3　実数とは何か

キーワード : 実数・完備・連続

前回、有理数でない数、というのが存在するところで終わったのでした。

今回は、この有理数でない数、すなわち無理数というものが、どのようなものか考えていきたいと思います。

典型的な無理数としては、$\sqrt{2}$ のような平方根で表されるような数ですが、これ以外にも円周率 π や自然対数の底 e などがあり、この限りではありません。

どうやれば、有理数からつながりをもったまま、しかもその世界からはみ出すことができるでしょうか?

1.3.1　完備

いくつか言葉の定義をしておきます。

順序　集合 X の中で、関係 $\leqq$ が定義されて、次の 3 条件が満たされるとき、順序という。

1. 集合 X のすべての要素 x について $x \leqq x$ が成り立つ。（反射律）
2. 集合 X の 2 つの要素 x, y について、$x \leqq y$ かつ $y \leqq x$ ならば $x = y$（反対称律）
3. 集合 X の 3 つの要素 x, y, z について、$x \leqq z$ かつ $z \leqq y$ ならば $x \leqq y$（推移律）

もちろん普通の順序を念頭においておけばいいわけですが、対象とする集合によってはこの条件を満たす順序関係を定義しておく必要があります。いまは有理数を考えていますから普通の順序のことだと思ってください。順序が定義されると、次の有界集合を定義することができるようになります。

有界と上界・下界、上限・下限　集合 A が集合 X の部分集合であるとき、ある $b \in X$ があって、すべての $a \in A$ について $a \leqq b$ が成り立つとき、A は (X の中で) 上に有界であるといい、この b を上界という。逆に $b \leqq a$ が成り立つならば、A は下に有界であるといい、b を下界という。上界に最小元があるならば、それを上限、下界に最大元があるならば、下限という。

この有界という概念が、有理数と実数を分ける重要な概念になります。

いま $A = \{0 \leqq x, x^2 \leqq 2\}$ という集合を考えます。これはすべての要素が、たとえば $x \leqq 2$ を満たしますから有界です。有理数のなかでは、この上界は最小元を持ちません。一方、これが実数の中でなら、上界は最小元 $\sqrt{2}$ を持ち、これが集合 A の上限となります。

この違いを**完備**といいます。きちんと定義するならこうなります。

完備　集合 A のすべての部分集合が、上に有界ならば上限を持ち、下に有界ならば下限をもつとき、集合 A は完備あるいは順序完備であるという。

有理数から実数を作る前に先回りして定義してしまった感がありますが、これから実際に有理数を完備化して実数を構成してみます。しかし、実は完備化の方法は一つではありません。以下ではその一つであるコーシー完備化を説明しようと思いますが、切断による完備化などほかにも完備化の方法はありますし、厳密なことを言えば、コーシー完備は上の順序完備よりもゆるい条件であって同じではありません。しかし、有理数の完備化としてはどの方法をとっても同じものになることが証明されています。この辺のことは省略させてもらいます。

1.3.2　有理数列が有理数に収束するとは限らない

有理数から無理数へつなげていくためには、何か無限に関わる操作をしなければなりません。有限回の操作を行ったのでは、それはまた有理数になってしまうからです。

そこで、数に対する操作の繰り返しとして数列を考えます。その極限として無理数が出てくるようなものを考えるのです。

たとえば、

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \tag{1.1}$$

という数列を考えます。いくつかこれを計算してみると、

$$a_2 = \frac{2^2+2}{2\cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$a_3 = \frac{\frac{3^2}{2^2}+2}{2\cdot\frac{3}{2}} = \frac{17}{12}$$
$$a_4 = \frac{\frac{17^2}{12^2}+2}{2\cdot\frac{17}{12}} = \frac{577}{408}$$

となります。これは、2から始まって加減乗除だけで計算していますから、どの項も有理数のままです。

さて、この数列は、どんどん差が縮まっていく性質を持っています。ε - δ 論法で厳密に書くこともできますが、ここではそういう数列を**コーシー列**ということだけ覚えておきましょう。

この数列の一般項を書き下すことはできませんが、収束する値があるとすれば、その値 α は $a_{n+1} = a_n = \alpha$ を満たすような数になります。この場合、

$$\alpha = \frac{\alpha^2+2}{2\alpha} \to \alpha^2 = 2 \to \alpha = \pm\sqrt{2} \tag{1.2}$$

となって、初項2ではじめているので負にはなりませんから、その極限は $\sqrt{2}$ であることになります。

このように有理数の列があったとき、それがコーシー列になっていて極限をもっていたとしても、その極限がまた有理数の範囲に収まるとは限らないのです。これは前節の有界であるが上限をもたないのと同じことです。収束するということは有界なわけですが、その行き先がその集合自身に含まれているとは限らないわけです。

そこで、有理数のコーシー列の極限を有理数に付け加えれば、その集合はコーシー完備になります。これが実数です。(厳密にはもうちょっと違う方法をとります。コーシー列そのものに同値関係を導入し、それの商集合として実数を定義します。)

こうして、有理数から実数を作ることができました。一般にコーシー列がその集合の中で収束するように拡大することを**「(コーシー) 完備化」**といいます。

実数の同値関係、加減乗除などもこの数列をつかって定義できますが、ここで厳密な議論を展開するつもりはないので割愛します。

さて、完備化の中でもコーシー完備化を取り上げたのは理由があります。それは最初の疑問、有理数と無理数だけですべて尽くされるのか、ということです。「数」を有限小数と無限小数に分けることができるということは、言い換えれば、すべての数は小数で表現可能ということです。これを保証するのがコーシー完備性です。次回はこのことと、実数の濃度について考えてみたいと思います。

1.4 実数は数えられない

キーワード:小数表示、実数の濃度、連続体仮説

1.4.1 実数を小数で表現する

さて、最初に目次のページで触れたように、実数は必ず小数で表すことができるのか、ということについて考えてみます。実数であるということは、その実数に収束する有理数のコーシー列が存在するということです。

ここで、前回の数列にもう一度登場してもらいましょう。ここで各項は有理数なので小数に展開できることが重要なポイントです。今回は分数を小数にしてみましょう。

$$a_2 = \frac{2^2+2}{2\cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$a_3 = \frac{\frac{3^2}{2^2}+2}{2\cdot\frac{3}{2}} = \frac{17}{12} = 1.4166\cdots$$
$$a_4 = \frac{\frac{17^2}{12^2}+2}{2\cdot\frac{17}{12}} = \frac{577}{408} = 1.4142156\cdots$$

第 4 項でけっこう $\sqrt{2}$ に近くなってますね。もっと計算を続ければ、必要なだけ精度をあげて小数を計算することができます。つまり、実数はかならず小数で表すことができるのです。しかし、有理数の範囲ではけっして $\sqrt{2}$ そのものにはならないので、割り切れたり循環したりする小数ではありません。ここに無理数が無限小数になる理由があります。

やっと一つ目の疑問、実数とは何か、それは必ず小数で表されるものなのか、ということの答えに辿りつきました。もちろん、厳密な証明などをはしょっていますので、もっと本格的に勉強したい人はこの章の文末に参考文献を挙げておきましたのでそれで勉強していただきたいと思います。

1.4.2 実数の濃度

次に、いままで自然数から有理数まで確認してきた「濃度」について考えたいと思います。

いままでの議論では、自然数も（その部分集合の偶数や奇数も）有理数も、可算無限という、大きさとしては同じ無限大の濃度を持つということを見てきました。さて、実数はどうなのでしょうか。

実数全体は 0 より大きく 1 未満の実数と 1 対 1 に対応させることができますので（適当な関数を与えることができます)、いま自然数と 0 より大きく 1 未満の実数とを比べることにします。

もし、この 2 つに 1 対 1 対応が作れたならば、これは「玉入れ方式」によって同じ濃度となります。なので、適当になにか対応表が作れたとしましょう。

$$\begin{aligned} 1 &: 0.12345678\cdots \\ 2 &: 0.23589279\cdots \\ 3 &: 0.38746142\cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

さて、いまから、これが矛盾を含むことを示します。いま対応表の上から順に、1 つ目から 1 桁目、2 つ目から 2 桁目ととっていき、その数字を一つずらした（9 なら 0 にする）数 x をつくります。今の場合、$x = 0.248\cdots$ です。これは、n 番目の数字とは、n 桁目で必ず異なりますから、すべての表の数字と異なるものです。よって、1 対 1 の表ではない、ということになります。この議論には、$0.09999\cdots = 0.1$ のような一意性の問題がありますが、そういう表現はとりあえず禁止というか、同値ということにして、0.1 に統一することにしておきましょう。こうした論法はよく用いられるもので、「対角線論法」と名前がついています。

こうして、自然数と実数の間には 1 対 1 の対応が作れないことが証明されました（厳密には選択公理などの前提が必要ですが)。自然数と対応できない実数がいくらでもつくれてしまうわけですから、実数のほうが多いということになります。

われわれは何気なく数直線というものを使ってきましたが、有理数まででは稠密（つまっている、2 章参照）とはいえ、まだスカスカなのです。要素の個数としては実数のほうがずっと多く、実数まで考えてはじめて数直線を埋め尽くすのです。実数のこの性質を**連続性**といいます。

実数の個数は**不可算無限**と呼ばれ、可算無限とはレベルのちがった無限大ということになります。

1.4.3 不可算無限の濃度と連続体仮説

では、自然数の個数、すなわち可算無限と比べてどのくらい多いのでしょうか。

ここで厳密な議論を展開する力は私にはありませんが、イメージとしては次のように考えることができます。

すべての実数は小数に展開することができます。そのとき数字は 10 進数である必要はなく、最小では 2 進数ということになります。実数を 2 進小数で表したとき、0 か 1 の列が可算無限個続くわけですから、この場合の数は便宜的に、可算無限個を M_N、不可算無限を M_R と書けば

$$M_R = 2^{M_N} \tag{1.3}$$

となります。この関係は、べき集合の公式を思い出すと、自然数（あるいは有理数）の部分集合の族が実数と同じ濃度になることを示しています。これは切断やコーシー列といった部分集合をつかって実数を定義していくことと関係していそうですが、詳しいことを論じるほど理解できていません …

ところで、可算無限と不可算無限という 2 種類の無限大があることが分かったのですが、ほかに無限大はないのでしょうか。いまのところ、可算無限がもっともちいさい無限大であることは分かっています。実は大きな無限大というのはいくらでも作れます。上の関係のように、べき集合を考えていくことで、いくらでも濃度が本質的にことなる、より大きな無限大を考えることができます。

しかし、未解決の問題もあります。可算無限と不可算無限の間の大きさをもつ無限大は存在するか、という問題です。そういうものはない、とするのが**「連続体仮説」**です。つまり、可算無限の次の無限大が実数（連続体）の濃度だということです。これはあくまで仮説というか、公理のようなもので、ほかの実数の性質や集合論の公理などから証明も否定もできない、独立したものだということが分かっています。不完全性定理で有名なゲーデルが否定的、つまり中間の無限大もあるだろうという立場だったそうですが、実際にそういうものが発見されているわけでもなく、いまのところどっちが正しいと決定できる状況ではありません。これについては現在の集合論の公理系（ツェルメロ・フレンケルの公理系＋選択公理）に何か足りないのではないかという議論がなされているようですが、これ以上つっこんだことはいえません。

1.4.4 まとめ

ここまでの議論をまとめましょう。数を広げていく、ということで、自然数に始まり、整数、有理数、そして実数へと広がっていく様子をみてきました。そして、濃度（集合の要素数）という面で、実数だけは別格だということ、それが「連続」であることにつながっていることを見ました。

ここでの議論は数学基礎論といわれるように、数学のもっとも基礎の部分を形作っているものです。ここからさらに議論を深めていくこともできます。

このような小さな集合から拡大してより大きな概念へと広げていくやり方、いわばボトムアップの議論とは逆に、最初に連続な集合（つまりは実数）というものがどのような性質を満たすべきかという公理群を与え、そこから議論を展開していく、いわばトップダウン的な議論もあります。どちらかというと、解析学としては後者のほうが議論を展開しやすいですし、その中で連続のもつさまざまな性質の議論がされますから、そのような公理論的な実数論も重要なのですが、そういったことについては解析学についての基本的な教科書を参照していただきたいと思います。

また、今回のように、最小の性質をもった集合にどのような性質を加えていけば必要な集合になるのか、という議論の進め方は、このあと、位相空間、距離空間といった議論があるのですが、これはそのうち、微分幾何学や物理学とホモロジー・ホモトピーといったことについて書くことがあれば触れることになるでしょう。

今回の連載としては、これからも数の拡張という方向性を続け、次回からは代数的な方向に進んでいきたいと思います。そして複素数・四元数へと数が広がっていく様子についてみていきます。

第2章　代数学の基礎

2.1　代数方程式と複素数

キーワード：代数方程式、複素数、代数学の基本定理

これまでは自然数に始まり、整数、有理数、実数と数を広げてきました。そこには引き算、割り算、平方根などの、新しい問題（計算）を、数の概念を広げることによって解けるようにしていくという流れがありました。今回からは、もっと一般の「代数方程式」というものを考え、それを解くためには何が必要なのかを見ていきます。

2.1.1　多項式と代数方程式

今回からは代数の話に入っていきます。まずは多項式を定義しておきます。

$$f(x) = a_n x^2 + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0) \tag{2.1}$$

と書き表される式を (n 次) 多項式と言います。そして $f(x) = 0$ の形にかける方程式を**代数方程式**と呼びます。

おなじみなのは、1 次方程式や 2 次方程式でしょう。

これまでの議論も、「方程式の解」という観点でまとめることができます。

たとえば、負の数 $x = -1$ は、1 次方程式

$$x + 2 = 1 \tag{2.2}$$

の解として現れます。また、有理数も、

$$2x = 1 \tag{2.3}$$

の解として $x = \frac{1}{2}$ を認めるということです。ここまでは 1 次方程式の話です。

平方根は、もっとも簡単な 2 次方程式

$$x^2 = 3 \tag{2.4}$$

の解 $x = \pm\sqrt{3}$ などとして必要になってきます。

実は、実数というのは代数方程式の範疇だけで考えられるものではありません。たとえば円周率 π を、有理数だけを用いた代数方程式の解として求めることはできません（こういう数を超越数といいます）が、今回は代数方程式の方向で話を進めていきたいと思います。

一般の 2 次方程式、

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{2.5}$$

の解法は、教科書的にいえば中学 3 年生で習うことになっています。そこでは因数分解や平方完成、解の公式といったものを習うわけですが、その一つ一つが数学のいろいろな場面で使われる重要な道具立てになっています。

とくに**「解の公式」**、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.6}$$

は、中学に出てくる数式の中では異例の複雑さで、中学生には嫌われることこの上ないものになっています。しかし、この「解の公式」のおかげでどんな 2 次方程式であっても、係数を公式に代入しさえす

れば解くことができるのです。「解の公式」は2次方程式に対する「最終兵器」といっても過言ではないでしょう。ビバ！解の公式!!

と持ち上げたところで、これに待ったをかけるような方程式が現れます。

$$x^2 + x + 1 = 0 \tag{2.7}$$

なんの変哲のない、簡単な方程式に見えます。しかし、これを解の公式を用いて解いてみましょう。

まずは、めんどくさいルートの中から計算しておくといいですね。やってみましょう。$a = 1, b = 1, c = 1$ を公式に代入します。

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 \tag{2.8}$$

なんてこったい … ルートの中が負になってしまいました。

私が中学生だった１〇年前はこういう問題も出まして、**「解なし」**と習ったものです。最近の中学の教科書やら入試問題集では、こういう方程式の存在は無視され、ないことにされているようです。(2012年度からまた指導要領が変わりますので、この辺の事情は変化するかもしれません)

ちょっと上では「最終兵器」とか言っておきながら、難攻不落、絶対に解けない2次方程式があるのです。それはそもそも「解がない」のだから解きようがないということになります。

2.1.2 虚数登場

2次方程式の解の公式の原型は、古くバニロニアの時代からあったようですが（もちろん当時はまだ負の数の概念もありませんから、今のような形にはなりませんが）、少なくとも5世紀から6世紀にかけてのインドでは今のような形で存在したようです（フワリズミの代数学)。しかし、そこでは当然「負数の平方根（$\sqrt{-3}$ など)」というのはあり得ない数として避けられてきました。

その状況が変わるのは3次・4次の代数方程式の解の公式が発見される16世紀ごろになってからです。この解の公式を計算する過程で、最終的な解が実数解になる場合でも、計算途中に負数の平方根を（形式的にであっても）使わなければならないという状況が発生したのです。

当初、これはあくまで便宜的なものであって、実際はありえない数とされてきました。これを覆し、負数の平方根も認めようとしたのはガウスです。

ガウスは、次に述べる「代数学の基本定理」を証明する際に、負数の平方根を認めれば、すべての代数方程式に解が存在することを証明しました。いまでは、負数の平方根を**虚数 (imaginary number)**と呼び、特に-1の平方根を記号 i で書くことが多いです (つまり $i = \sqrt{-1}$)。「imaginary=想像上の」、あるいは「虚」という語にあるように、当時は実在の対応物を持たない、概念上のものとされたようです。しかし、ガウスはすぐに複素平面のアイディアを具体化し、複素数 ($a + bi$ の形に書ける数) が平面上の点と対応することを示しました。複素平面についてはこの文章の別の章を割り当てて詳しくみることにしたいですが、現代の物理学では、波動関数、あるいは状態と呼ばれる基本的な量が本質的に複素数であり、虚数なしには物理を表現することは難しくなっています。その意味では、もう「虚」という言い方は実態を表していないといえるかもしれません。

ここでは、虚数・複素数の性質と基本的な計算について確認しておきましょう。

もう一度、定義からはじめます。**虚数単位**i を、

$$i^2 = -1 \tag{2.9}$$

で定義します。ルートを使うよりも、「自乗して-1になる数」という定義にしておきます。これを使えば、

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}i \tag{2.10}$$

などと書き表すことができます。実数×虚数単位の形に書ける数を「純虚数」といったりします。

普通の実数 (real number) と純虚数の和になる数を**複素数 (complex number)** といいます。

$$z = a + bi \tag{2.11}$$

形としては $2+\sqrt{3}$ と似た形をしていますが、普通の平方根を使った数は数直線上にありますが、この複素数はもはや数直線だけで表すことはできません。その辺の事情はまた場所を改めて解説していきたいと思います。ここでは、複素数の上に加減乗除の計算を定義しましょう。和と差については、平方根の計算と同じようにできます。二つの複素数 $x = a + bi, y = c + di$ があったとき、この 2 数の和と差は、

$$x \pm y = (a \pm c) + (b \pm d)i \tag{2.12}$$

となります。次に積ですが、$i^2 = -1$ に注意して計算すれば、

$$x \times y = (a + bi) \times (c + di) \tag{2.13}$$

$$= ac + bci + adi + bdi^2 \tag{2.14}$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i \tag{2.15}$$

となります。ちょっと複雑な式ですね。

次は商ですが、その前に複素数の逆数について計算しておきましょう。これは「分母の有理化」の要領です。

$$1 \div y = \frac{1}{c + di} \tag{2.16}$$

$$= \frac{1}{c + di} \times \frac{c - di}{c - di} \tag{2.17}$$

$$= \frac{c - di}{c^2 + d^2} \tag{2.18}$$

ここに表れた複素数の虚数がついている部分（虚部といいます）の符号を変えたものを、元の複素数に**共役**な複素数といい、記号 $z^* = a - bi$ で書きます。また、最後の式の分母に表れた $c^2 + d^2$ の平方根をその複素数の**絶対値**といい、記号 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ で表します。

これらを用いれば、複素数の商は次のようになります。

$$x \div y = (a + bi) \times \frac{1}{c + di} \tag{2.19}$$

$$= \frac{(a + bi) \times (c - di)}{c^2 + d^2} \tag{2.20}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2} \tag{2.21}$$

積と商については、形も複雑ですし、慣れないうちは大変かと思います。積と商の意味するところについては、第 7 章の複素平面で考えるとより明確になるかと思います。

ひとつ変わった点は、複素数はもはや順序体ではないということです。順序体ではない、というのは順序が導入できない、とは違います。たとえば、絶対値を比べることで大小関係を導入することはできます。しかし、順序体になるには大小でイコールになるなら元の数も等しい、といった性質が必要なわけですが、絶対値が等しいだけでは複素数として等しいとはいえないわけです。そういう意味で順序体ではない、という言い方をしているわけです。この後の代数学の基本定理の証明でも、絶対値を使った大小関係を導入して使っています。

複素数は順序体ではありません。ですから実数のような順序完備でもありません。しかし、連続性などの性質はもっていますから、ほとんどの議論は十分成立します。絶対値を用いればコーシー完備であることはいえるわけです。そこから解析的に必要な性質を満たしていることは言えます。

とりあえず、負数の平方根を認めて複素数を作ったときに、矛盾なく加減乗除という計算が定義でき、自然に数を拡張することができるということを確認してください。

2.1.3　代数学の基本定理

さて、虚数、あるいは複素数の存在を一度認めたならば、2 次方程式には必ず解が存在することになります。ここでも、新しい問題（2 次方程式）を、数の世界を広げることで「解ける」ようにしたわけです。

では、3 次方程式以降はどうなのでしょうか？3 次方程式の解を表現するには、また新しい虚数のようなものを導入して数を広げる必要があるのでしょうか？

その答えは「No」です。逆に言えば、複素数を認めてしまうと、すべての代数方程式に解が存在することが証明できます。これを**「代数学の基本定理」**といいます。この代数学の基本定理を証明することは、代数学の力だけではできません。複素関数論という解析学（微分・積分）の定理か位相幾何学の定理を使わなければならないのです。こういうところも数学の面白いところです。一応、幾何学・代数学・解析学などと分野が分けられていますが、それぞれが独立であるわけではなく、お互い別の分野の成果を用いて成立している部分があり、やはり数学は全体で一つの学問分野として成り立っているわけです。

さて、今回のメインディッシュ、代数学の基本定理の証明に行きましょう。ですが、厳密に展開せず、ストーリーというか大まかな流れだけを見たいと思います。ここでは、一般的に目に触れる解析的な証明を紹介します。（そのうち、どこまで代数的な知識だけで証明できるのか、といったマニアックなテーマも追及してみたいですが）

命題は、「多項式 (2.1) について、$f(x) = 0$ を満たす複素数 x が少なくとも 1 つ存在する」ということである。証明は大きく分けて 2 段階あります。

第 1 段階。まず実数値関数としての $|f(x)|$ は、複素数上で最小値を持つ。

第 2 段階。実は、その最小値は 0 である。

以上より、$|f(x)| = 0$ になるのは、$f(x) = 0$ になるときに限るから、結局、$f(x) = 0$ となる点が存在することになる。

まずは第 1 段階を示そう。

x をどんどん絶対値の大きな値に変えて行ったとしよう。このとき、$f|(x)|$ もどんどん大きくなる。ちゃんと書けば次のようになる。

$$f(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

と変形すれば、$|x| \to \infty$ のとき、かっこの中の第 2 項以降は 0 に収束するので、$|f(x)|$ はほぼ $|a_0||x|^n$ になる。「ほぼ」というのがあまり厳密ぽくないが、結局、x の絶対値を十分大きくしていけば、それにともなって $f(x)$ の絶対値も大きくなっていく。つまり、

$$\lim_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$$

となる。言い換えれば、任意の正の実数 M を設定したとき、十分大きな正の実数 R があって、

$$|x| > R \Rightarrow |f(x)| > M$$

とできる。ここでたとえば $M = |f(0)|$ とおこう。そうすると、ある実数 R があって、それより外側では $|f(x)| > |f(0)|$ が成り立っている。一方、内側 $|x| \leqq R$ は有界で、$|f(x)|$ は連続なので必ず最小値 c を持つ。（これは解析学の定理なので説明していませんが、コンパクト・連続といったところで出てくる初歩的な定理なので、解析系の教科書を見てください。）

この最小値 c は、$|f(0)| \geqq c$ なので、$|x| > R$ では $|f(x)| > |f(0)| \geqq c$ となって、結局複素数全体の範囲にわたっての最小値になる。これで第 1 段階が終了です。

第 2 段階。言い換えて、$|f(a)| > 0$ ならば、かならず $|f(a)| > |f(b)|$ となる複素数 b が存在することを示します。

これについては、計算の技巧的になってしまうので詳細は省きますが、適当な方向へちょっとずらしてやれば、$|f(a)| = 0$ でない限り、絶対値をさらに小さくすることができます。厳密な証明については

解析あるいは線形代数の教科書などを参照していただきたいのですが、これには後に説明する複素数の偏角やらオイラーの公式を使った説明が分かりやすいので、ここでは割愛させていただきます。

これにより、第1段階の最小値 c が 0 でないならば、それより小さい絶対値を持つ点が存在してしまい、c が最小値であることと矛盾します。結局、最小値は 0 でなければならないことになります。

そして絶対値の最小値が 0 ならば、元の多項式の値も 0 のはずですから、そこが代数方程式の解であることになります。

第1段階で使っている連続性、第2段階で使っている性質、それぞれが代数的というより解析的な性質なわけですね。ですから、これはもはや「代数学」の基本定理と呼ぶにはふさわしくないのかもしれません。（実際、ガロア理論などの方程式論を含めた現代代数学において、「代数学の基本定理」は必須ではない）

「代数学の基本定理」については、ダランベールやラプラス、オイラーといった数学者たちが挑戦し、ガウス単独のものではありませんし、どうやらガウスの証明も厳密には穴があって選手権は別の数学者かもしれないという説もあります。数学史にもまだまだ取り組むべきことは多いようです。

2.1.4　まとめと今後の展開

数を広げるという観点から、今回は複素数を導入しました。これによって、すべての代数的な方程式に解の存在が保障されます。

最終目標の四元数まではもう一息なのですが、その話に入る前にもう少し方程式について話をしておきたいと思います。方程式に解が存在することは分かったとして、その解を見つけることができるか、という問題が残っているからです。2 次方程式には解の公式が存在しました。それ以上の方程式にも解の公式があるのかというと、5 次以上では存在しないことが証明されていることは上にも書きました。それでは解を求めるにはどうしたらいいのでしょうか？次回は、因数定理とそれを応用した方程式の解法について触れたいと思います。

そして、その次からは複素数のさまざまな側面を検討する中で、四元数へと近づいていきたいと思います。

2.2　因数定理と代数方程式の解の探し方

キーワード：剰余定理・因数定理・代数方程式の解法

2.2.1　代数方程式の代数的解の公式

すべての代数方程式に解が存在することがわかりました。では、その解を実際に求めるにはどうしたらいいでしょうか？

2 次・3 次・4 次の方程式には解の公式があることはすでにふれました。つまり、4 次以下の方程式には必ず解を求める方法があるのです。

しかし、5 次以上の方程式には代数的な解の公式は存在しません。見つかっていないのではなく、「作れないこと」が証明されているのです。「代数的」というのは加減乗除や累乗根を使って、という意味です。

これはアーベルやガロアの理論によるもので、抽象代数学・群論という分野の話になってきます。これを話すにはまた別の道具立てが必要ですから、機会があればどこかで触れたいと思います（群論についてはこの文章の流れのなかで触れるつもりではいます）。

とにかく、5 次以上になると解があるのにそれを絶対に見つける方法はないということになってしまいます。やはり、必ず解くことができるという安心感を与えてくれるという意味で、解の公式があるということは素晴らしいことではないでしょうか。

もちろん、どうにかして解くことができる場合もあります。その糸口を見つけてくれるのが次に説明する「因数定理」です。

実は「代数的」でないならば解の公式は存在します。それは楕円関数などの「解析的」道具を借りてくることによって作れるのですが、解析学の話はしていませんし、実用的にも計算量が多すぎて使えないのでこれについては省略させてもらいます。

次節では、2 次方程式を解くときにも大変お世話になる「因数分解」を使った解法について話していきましょう。

2.2.2 因数分解と方程式：剰余定理と因数定理

2 次方程式を解くときも、それが「因数分解」できるときは解の公式を使うまでもなく解けます。この話を一般化しましょう。

多項式 $P(x), Q(x)$ について、割り算 $P \div Q$ というのを考えてみます。もちろん $P(x)$ の次数が、$Q(x)$ のそれと同じか大きくなければ割れません。いま、

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

と書けるとき、$D(x)$ を商、$R(x)$ を剰余といいます。これは普通の割り算と同じ感覚で理解していただければいいでしょう。

このとき、それぞれの多項式の次数を p, q, d, r で表すなら、$p = qd$ かつ $q > r$ です。とくに、$Q(x)$ が 1 次式 $ax + b (a \neq 0)$ ならば、剰余項 $R(x)$ は定数になります。すなわち、

$$P(x) = (ax + b) \cdot D(x) + R$$

です。よって、$x = -b/a$ を代入すれば $P(-b/a) = R$ となります。これを**剰余定理**といいます。

そして、ちょうど $P(x)$ が $(ax+b)$ で割り切れるとき、つまり $R = 0$ のとき、$P(-b/a) = 0$ となって、$x = -b/a$ は $P(x) = 0$ の解になります。これを**因数定理**と呼びます。

こうして、代数方程式を解くことと、多項式を因数分解することは同じことになります。これを利用すれば、高次の多項式を解くこともできるわけです。

たとえば、$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ という方程式を考えてみます。

ぱっとみてわかるのは、$x = 1$ を代入すると $1+2-1-2 = 0$ となり、これが解になっていることです。

そこで、これは $(x - 1)$ で因数分解できるはずで、

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

と因数分解できますから、結局解は $x = \pm 1, -2$ の 3 つであると求まります。

このように一つの解を見つけることで、それを使って因数分解していけば次々に次数を減らすことができ、方程式を解くことができる場合があります。

もう一つ例をあげましょう。

数学検定 1 級 (第 161 回) に過去出題された問題で、$x^4 - 4x - 1 = 0$ を解け、というものです。

前の問題とちがい、ぱっとみてすぐに代入して分かる解はありません。では、どうしたらいいでしょうか。

これは因数分解をどうにかしてやってみるというしかありません。

ちょっと技巧的になりますが、

$$\begin{aligned} x^4 - 4x - 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^2 + 4x + 2) = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2(x^2 + 2x + 1) \\ &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}(x + 1))^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + (1 + \sqrt{2}))(x^2 - \sqrt{2}x + (1 - \sqrt{2})) \end{aligned}$$

それぞれを解の公式をつかって解けば、

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} + 2}i}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$$

となります。

このように因数分解すれば解ける場合もあります。

2.2.3　2 次方程式に分解する

実はこの問題をもう少し「力技」で解くこともできます。

その前に一つ、武器を作りましょう。

「共役複素数」というものを考えます。これは $z = a + bi$ に対して $\bar{z} = a - bi$ と虚数部の符号を変えたものを「共役」と呼びます。これについてのいくつかの性質を書いておきましょう。

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$z - \bar{z} = 2bi$$

$$z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$\overline{\alpha} \times \overline{\beta} = \overline{\alpha \times \beta}$$

とくに、

$$\overline{z}^n = \overline{z^n}$$

とりあえず、ある複素数と共役複素数の和・積は実数になることを覚えておきましょう。また、実数の共役はその実数自身です。

さて、ここで実数係数の方程式 $f(z) = 0$ が複素解 $z = \alpha$ を持つとしましょう。そうすると、$f(z)$ の係数はすべて実数ですから、$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ です（具体的な多項式で確かめてみればわかると思います）。なので、この解と共役な複素数も、$f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)} = 0$ となって、元の方程式の解になります。つまり**実数係数の方程式が複素数の解をもつならば、それと共役な複素数も解である**、ということが言えます。

そこで因数定理によって、この方程式は $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ で割り切れるはずです。ところで、この式は、

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$$

と展開できますが、x の係数も定数項も、どちらも先に書いたように実数ですから、この 2 次式は実数係数になります。

よって、**実数係数の多項式は、かならず実数係数の 1 次式あるいは 2 次式で因数分解することができる**ということがいえます。

さて、これを踏まえて先の 4 次方程式の問題にアタックしてみましょう。これが 2 次式で因数分解できるのですから、

$$x^4 - 4x - 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

と無理やりおいてみましょう。すると展開して係数を比べることで、

$$a + c = 0 \tag{2.22}$$

$$b + d + ac = 0 \tag{2.23}$$

$$ad + bc = -4 \tag{2.24}$$

$$bd = -1 \tag{2.25}$$

ということが分かります。4つの未知数に4つの方程式ですからこれは解けそうです。結局もとの4次方程式に戻ってしまったりしたら意味がないですが、これは解くことができます。普通に $c = -a$ と $d = -1/b$ とおくことによって文字を減らし、残りの二つを使えば面倒な計算にはなりますが、難しくはないと思います。

結果、前と同じ因数分解の結果を得ることができます。前の解法では項を足し引きして少し技巧的に解いていましたが、それを思いつかなくても無理やり2次式に分解して解くこともできるわけです。

コンピュータを使えば、与えられた多項式に対してそれを因数分解できる2次式を探し出すこともできます。これはベア・ストウ法とよばれる計算方法として知られています。機会があれば実際のプログラミング例をアップしたいと思います。

2.2.4 まとめ

今回は実際に方程式を解く、ということに焦点を当てましたが、もう一つの目的は因数分解と因数定理について書いておきたかったというのがあります。たとえば、$x^2 + 1$ は実数の範囲ではこれ以上因数分解できませんが、複素数を使うことを認めれば $(x - i)(x + i)$ と因数分解できてしまいます。これの延長上に、最終目標である四元数があるのです。

ですが、ここではまだ四元数の話にいく前に、複素数についてもう少し掘り下げておきたいと思います。次回は、複素数の幾何学的な性質、「複素平面」についてみていきます。これによって、複素数の積と商についての「イメージ」がつかめると思いますし、平面幾何学と複素数の関係も見えてきます。そして、これがのちに四元数を幾何学的に理解する助けになるはずです。

2.3 虚数はどこにある？－複素平面の考え方

キーワード：複素平面・偏角と積・平面上の回転・オイラーの公式

今日のテーマは、「虚数はどこにあるのか？」です。前にみたように、実数は数直線を隙間なく埋め尽くしているので、そこに新しく虚数単位を入れる余地はありません。つまり、虚数は数直線上にないのです。ここでは、虚数はどこにあるのか、ということを考え、そこから複素数の幾何学的なイメージを描いていきましょう。

2.3.1 虚数倍の意味

虚数の性質について考えるときに出発点となるのは当然、虚数単位の定義 $i^2 = -1$ です。つまり2回かけると -1 倍になるという性質があるわけです。

そこでまず -1 倍するということの意味を考えてみましょう。数直線上の点に -1 をかけると、原点0を挟んで反対側の点になります。つまり、数直線をひっくり返すことに対応しています。

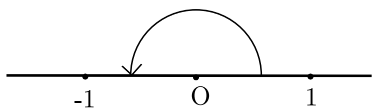

図 2.1: -1 倍は 180 度の回転に相当する

一言で「ひっくり返す」と言っても、これには2種類あります。ひとつは、原点を中心にぐるっと回転させたときの「ひっくり返す」です。もう一つは、原点に鏡を置いて移した（あるいは図形的にいえば線対称にした）「ひっくり返す」です。いま、この「ひっくり返す」という操作を2回に分けたいわけです。そうすると後者の鏡を使ったほうでは、これを2回に分割した操作に分けることはできないのでこちらを用いるのは難しそうです。こういう変換を「不連続変換」といいます。一方、前者の回転を考

えた場合、ひっくり返すのは 180 度の回転であり、この回転の角度をいろいろと変えれば、この操作を分割したり繰り返したりすることを容易に表現することができます。これならば、虚数倍を「90 度回転させること」に対応させることができそうです。

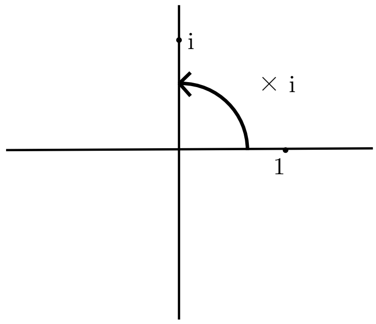

図 2.2: i 倍は 90 度の回転に相当する

こうすると、複素数 $a+bi$ の意味もはっきりしてきます。i が実数と直交する方向を表すとすれば、$a+bi$ は平面上の点と対応させることができます。このように、複素数と平面上の 1 点を対応させた平面を、**複素平面**、あるいは**ガウス平面**と呼びます。以下、この「虚数は 90 度回転」というアイディアが首尾一貫した数学を構築するか確認していきましょう。

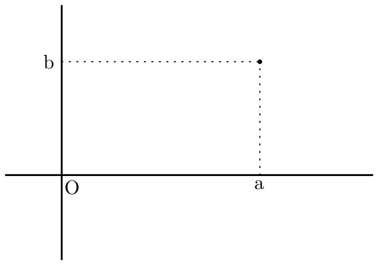

図 2.3: 複素数と平面上の 1 点を対応させる

複素平面上、実数に相当する元の数直線を**実軸**、純虚数に相当する縦軸の方を**虚軸**と呼びます。ある複素数の共役複素数は、実軸について対称な点に対応することになります。

このようにして考えた場合、複素数の和と差は、ベクトルの和と差のように、それぞれの座標の和と差として考えることができます。

そして、複素平面を考えることで積と商にも具体的なイメージを与えることができます。これを次の節でみていきましょう。

2.3.2 複素数の極形式と積・商

前回、複素数の積と商についての定義を書きましたが、かなり複雑な式であり、それがどのような意味を持つのかは明らかではありませんでした。そこで、複素平面の考え方によって新しく「極形式」を導入することで、複素数の積・商の幾何学的意味を明らかにしたいと思います。

座標系の極座標を知っている方もいらっしゃるでしょう。極形式は複素平面を極座標で表したものです。前回にも登場した絶対値 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ は、複素平面上でも原点からの距離に対応し、これは直観的にも分かりやすいと思います。複素数は 2 つの数字を用いて表現される量ですから、絶対値に加えてもう一つの量を使うことでも表現できるはずです。これに当たるのが、**偏角**です。これは複素数を表す点と原点を結んだ線分が実軸となす角度（図参照）です。

$z=a+bi$ とおくと、$r=|z|$ として、偏角 α は、$a=r\cos\alpha, b=r\sin\alpha$ となるような角度として定義されます（単純にタンジェントにしてしまうと、180 度以上の角度が表現できない）。これによって、複

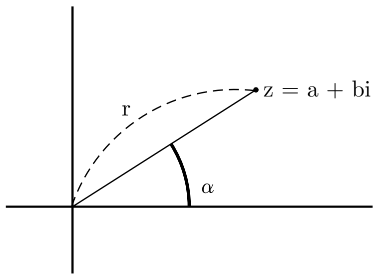

図 2.4: 複素数の極形式

素数は $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ と表すことができ、これを極形式と呼ぶのです。

この極形式を使って複素数の積を考えてみましょう。いま 2 つの複素数 $z = p(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ と $w = q(\cos\beta + i\sin\beta)$ の積を考えます。

$$\begin{aligned} z \cdot w &= pq(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) && (2.26)\\ &= pq(\cos\alpha\cos\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta) && (2.27)\\ &= pq\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\big) && (2.28)\\ &= pq\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big) && (2.29) \end{aligned}$$

最後の変形には三角関数の加法定理を用いました。これはかなりイメージしやすいものになったのではないでしょうか。複素数の積とは、それぞれの絶対値の積をとり、偏角は和になる、といえます。これは複素平面という幾何学的イメージを導入したことの恩恵です。とくに後半の偏角についての部分を **「ド・モアブルの定理」** といいます。

商はこの逆ですから、絶対値の商をとり、偏角は差である、と定義できます。

これは、当初の「虚数は 90 度回転」というアイディアとも整合がついています。(文章中は分かりやすく度を用いますが、三角関数などのパラメタとしてはラジアンで表記します)

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

という変形が可能ですから、虚数を乗じることは偏角に 90 度加えることに対応し、まさに「虚数は 90 度回転」になっているわけです。そして極形式を導入することによって、一般の角度の回転についても複素数で表現できることが明らかになりました。

以上の議論によって、虚数単位を 90 度回転とみなし、複素数を平面上の点と対応づけるという考え方が首尾一貫したものであり、また積・商という演算についてはむしろこの観点からの方が直観的なイメージがつかみやすいということが分かったと思います。

2.3.3 オイラーの公式

ここで少し微分の考えを使う話をします。これを入れるかどうか迷ったのですが、以上の話だけでは高校の数学の教科書に書いてあることとほとんど同じです。少し先を見るという意味でも、内容的に非常に美しく興味深いものであるという意味でも、オイラーの公式というものについて触れることにしました。

いま、複素数の「積」は偏角の「和」として表現されることを見ました。この「積」が「和」になるという計算規則はどこかで見覚えがないでしょうか? これはいわゆる指数規則と同じことです。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

指数の肩は、積によって和になります。これはまさに上のド・モアブルの定理と同じ形をしています。

そこで、複素数の偏角の部分をなにか指数関数で表すことができないか考えてみましょう。

ます指数のもとになる数字 (上の式では a) に何を選ぶかですが、普通の対数のように 2 や 10 を選ぶこともできるでしょうが、あまりそういう普通の数を選ぶ利点はなさそうです。すぐ後に微分を用いることを考えて、微分に便利なものを選びましょう。それには「自然対数の底 e」が適任です。これは $e = 2.7183\cdots$ という無理数で、微分しても変化しないという性質があります。

$$(e^x)' = e^x, (e^{ax})' = ae^{ax}$$

です。そして、いま考えたいことは、

$$e^{A\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{2.30}$$

となるような A が存在するのか、ということです。これがド・モアブルの定理と整合することは、

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) &= e^{A\alpha}\cdot e^{A\beta} && (2.31)\\
&= e^{A(\alpha+\beta)} && (2.32)\\
&= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) && (2.33)
\end{aligned}$$

という計算から分かります。式 (2.30) の両辺を微分してみましょう。

$$\begin{aligned}
(e^{Ax})' &= Ae^{Ax} && (2.34)\\
(\cos\alpha + i\sin\alpha)' &= -\sin\alpha + i\cos\alpha && (2.35)\\
&= i(\cos\alpha + i\sin\alpha) && (2.36)
\end{aligned}$$

この二つを比べることによって $A = i$ であると結論することができそうです。ここでも虚数単位がでてきました。つまり、

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{2.37}$$

ということです。このように「虚数乗」を定義することは計算規則上も微分・積分のその他の面からもまったく矛盾なく使えることが分かっています。これを**「オイラーの公式」**といいます。

これからとくに、

$$e^{i\pi} = -1$$

$$i^i = (e^{\frac{\pi}{2}i})^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

となり、円周率 π、自然対数の底 e、虚数単位 i が不思議な関係で結ばれていることが分かります。とくに虚数の虚数乗が実数になり、しかも自然対数の底と円周率で表されるというのはなんとも不思議としかいいようがありません。

オイラーの公式は、三角関数の微分積分を虚数の積に変換できることから、波動や交流回路などの周期的な運動を表すのによく使われます。また量子力学では虚数が現れることが本質的ですし、素粒子論などで重要な道具となる経路積分はまさにオイラーの公式に土台を置いています。

2.3.4 まとめ

負数の平方根やら複素数やらというものは、その導入から言えばまさに「想像上の」存在のようでした。それは数直線上に居場所がないことからもなにやら宙に浮いた、幽霊のような存在だったかもしれません。しかし今回みてきたように、複素数と平面上の点を対応させ、虚数単位に 90 度回転という幾何学的意味を持たせることで、複素数の居場所を作ることができるばかりでなく、積・商といった演算に具体的なイメージを持たせることができました。そして、指数関数との関係で少しみたように、これが微分・積分の分野でも大きな進歩を見せるのですが、それは今回の話と大きくそれるのでまた機会があ

れば書きたいと思います（いわゆる複素解析のことですが、自分の遅筆ぶりではそこまで触れる余裕なさそうですが）。

さて、次回は四元数に入る前の最後の準備として抽象代数学について触れておきたいと思います。とくに群論の入口と計算規則についていくつかの確認をしておきたいと思います。これは四元数がいままでの数と違った性質をみせるためです。 いきなり四元数の話に入るよりも、考えている対象によって計算規則が変わりうるということに（特に高校数学までしかなじみのない人にとっては奇異に映るであろう「交換則」が成立しない状況に）慣れてもらう意図があります。

2.4 数学をルールから捉える—抽象代数学・群について

キーワード : 抽象代数学・群・環・体

今回の話は、少しわき道にそれるようにも見えるかもしれません。しかし、四元数の性質を考える前に、計算のルールに着目した考え方である「抽象代数学」について触れておきたいと思います。というのも、四元数はこれまでの複素数と違ったルールで計算されるからです。そういうものにいきなり触れるよりも、もっと分かりやすい例を交えて、計算ルールの自由度について考えておくのはよい準備になると思います。

2.4.1 計算のルールに着目する「抽象代数学」

私たちは、ふだん何気なく次のような計算をしています。

$$1+2 = 2+1 \tag{2.38}$$

$$2\times 3 = 3\times 2 \tag{2.39}$$

$$2\times(3+4) = 2\times 3+2\times 4 \tag{2.40}$$

式 (2.38) や (2.39) のような計算が可能であることを「交換則」といいます。これは計算の順番を交換しても結果が変わらないことをいいます。和や積とは違い、差や商は計算の順番を変えてしまうと結果が変わってしまいます。こういう計算は「交換則が成り立たない」といいます。

一方、式 (2.40) の計算は、「分配則」といいます。かっこを外す計算をするときの基本ルールです。これは和を差に変えても成り立ちますが、積を商にした場合は、右からの割り算のとき、すなわち $(3+5)\div 2 = 3\div 2+5\div 2$ の場合のみ成り立ちます。

さて、この話を一般化しましょう。

まず集合 S を考えて、そのうえでの演算「$\cdot$」を考え、これが S 上で閉じているとします。つまり、S の元 a, b があったときに、$a\cdot b$ もまた S の元になっているとします。

このとき、以下の条件をすべて満たすならば、集合 S は演算 $\cdot$ について、**群**をなす、といいます。

1. 単位元 e の存在 : すべての $a\in S$ について、$a\cdot e = e\cdot a = a$ となる元 e が存在する
2. 逆元の存在 : すべての $a\in S$ について $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$ となる元 $a^{-1}\in S$ が存在する。
3. 結合則 : $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

これは、普通の実数や複素数が和や積（積の場合 0 を除く）について成り立っていることはすぐにわかると思います。

さらに

4. 交換則 : $a\cdot b = b\cdot a$ が成り立つ

を満たすならば、これを**加群（可換群・アーベル群ともいう）**と言います。

ここで交換則を別格に扱ったことには意味があります。今まで出てきたような普通の数は、交換則も成り立つ加群を構成していました。しかし、数学で扱う対象を広く考えるならば、むしろこのような性質をもつものは少なく特殊な例といえます。そこで、より広い「群」を考え、それへのさらなる付加条件として交換則をもつ群として加群を定義しています。

数学の対象となるもので、加群ではない例としてまず挙げられるのが、行列でしょう。

行列は、たとえば以下のような 2 行 2 列の正方行列があります。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

行列の積は、たとえば 2 次の正方行列 A, B の積ならば以下のように定義されます。

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

この積は群を作りますが、一般に $AB \neq BA$ となることは容易に確かめることができると思います。

また、ベクトルの外積と呼ばれる計算も、交換則を満たしません。これは、一般に

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{2.43}$$

が成り立ちます。このように、積の順番を交換するとマイナスがつく場合、とくに**反可換**といいます。

行列やベクトルの積についての詳細は線形代数学の教科書を参照してください。

先取り的にいうと、複素数は実数になるときに順序体であることを捨てました。四元数はさらに可換性を捨てるのです。そうやって計算のルールの制限を取り除くことによって、より複雑な構造を獲得するといってもいいでしょう。このような拡張は、次に結合則を捨てる八元数で群を作るものは終わりになりますが、そこまでの話をするつもりはありません。こういった議論を紹介しているのは、多分に最終的な目標である量子力学（場の量子論）を意識して作っています。光などの相互作用はボソンと呼ばれ、交換する世界に属します。いっぽうの電子などの物質はフェルミオンと呼ばれ、反交換の世界に属しています。そこでは、計算ルール（代数）が大きな役割を果たしているのですが、そういう話もいずれはどこかで書きたいと思っています。

2.4.2 数以外の群と群の表現

数以外でも群を作ります。たとえば、次のような 3 文字の文字列を考えます。

$$A = \{abc\} \tag{2.44}$$

このとき、1 文字目と 2 文字目を交換することを、「互換」といい (12) と表記します。こうすると、いまの文字列は、

$$A' = \{bac\} \tag{2.45}$$

となります。こうした文字の交換全体は群をつくり、対称群といいます。これは文字式の対称式を不変にする変換という意味で、方程式の解と係数の関係で出てくる基本対称式と関連して、方程式論で重要な意味をもつ群です。

また、図形の変形なども群を作ります。たとえば、図形を平行移動・回転・鏡映変換（左右逆にする、線対称ともいう）したとき、図形の形と大きさは変わりません。そしてこれらの変形を繰り返し行っても形と大きさが変わらないという性質は保たれたままです。これらの変形を合同変換といい、これも変換の合成を積とみなせば群を作ります。

ここで、正 6 角形を不変に保つ変換について考えてみましょう。これは頂点を別の頂点に移す変換として考えることができ、60 度の整数倍の回転と、3 本の対角線および対辺の中点を結んだ 3 本の線を軸とし

た鏡映の合計 12 種類が考えられます。いまはこのうち 6 個の回転を考え、これを $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ としましょう。

a_0 は 0 度 (360 度）の回転で、これが単位元（元に戻る変換）e になっています。また二つの回転を合成したものは、角度を足したものになっていますから、これも 6 個の回転のうちのどれかに（360 度の差を無視すれば）同じになります。また 60 度に対して 300 度の回転といった逆元が存在します。さらに交換則も成り立つことも確かめられます。以上のことから、この変換は一つの加群を構成することが分かります。

さて、恒等写像を $a_0 = e$、60 度の回転を $a_1 = a$ とすると、$a_2 = a^2, a_3 = a^3, a_4 = a^4, a_5 = a^5$ となり、$a^6 = a_0$ と 6 個目でもとに戻ります。このように積を繰り返していくと恒等写像に戻るような群を「巡回群」といいます。

この「6 乗すると単位元になる」という性質はこの回転による群だけではありません。複素数の世界で考えて、

$$z^6 = 1 \tag{2.46}$$

の解である複素数、

$$z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \tag{2.47}$$

とこれの累乗が作る群も同じ性質を持ち、複素数の積に関して加群を作り、まったく上の巡回群と同じ性質を有していることが確認できると思います。これはド・モアブルの定理からこの複素数 z が 60 度の回転を表すということからも明らかでしょう。このように、姿は違えども同じ形の計算規則を満たす二つの群は**同型**である、といいます。

さらにいえば、60 度の回転を表す行列

$$R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

とそれの累乗が作る群も同じ性質をもちます。これら 3 つの群はすべて同型です。最初の図形としての巡回群は「図形の変換」を表す群でした。他の二つは 1 つの複素数、あるいは 2 次の実正方行列（正確には直交行列、後述）という違いはあるものの数を使って表されています。このように、何かしら数を使って表されたものを、その群の「表現」といいます。一番簡単な例である 2 次元の回転にも 2 種類の表現があったように、一般にその表現は一種類とは限りません。このことはのちに四元数を理解するうえで重要なポイントになってきます。

次節では行列の作る群について、もう少し分類をしておきたいと思います。これは少し専門的になりますが、表現の話だけでなく、四元数や場の理論といったさまざまなものと関連する事柄なのでいまのうちに触れたいと思います。（というか、この話をするためにこの章を設けているといってもいいかもしれません）

2.4.3 リー群—行列の部分群たち

まず一番広い群は正方行列の作る群で、n 次の一般線形群 (general linear group)$GL(n)$ あるいは実数を要素にするという意味で $GL(n, \mathbb{R})$ と書きます。複素一般線形群ならば $GL(n, \mathbb{C})$ です。

これに条件をつけたもので群を構成するものがあります。これらは群の部分集合が群になっていると意味で**部分群**と呼ばれます。

まず大きなくくりとして行列式が 1 になるものに限定します。行列式は行列の積に対して $det|AB| = det|A| \cdot det|B|$ が成り立ちますから、行列式が 1 になる行列同士をかけるとその結果も行列式が 1 になります。よって、これは群を作り、特殊線形群 $SL(n, \mathbb{R})$（複素係数なら $SL(n, \mathbb{C})$）と呼ばれます。以下、「特殊」＝「行列式=1」と読み替えてください。また一般的に、複素数は 1 つの要素について実部・虚部の 2 つの変数があることとになりますので、その自由度 (独立な変数の数) は倍になります。

次に実行列のうちで、

$$A^T = A^{-1} \tag{2.49}$$

が成り立つ行列を直交行列といいます (A^T は A の転置行列)。なぜならば、この行列の行ベクトルあるいは列ベクトルは、それぞれお互いに直交するベクトルになるからです。これも積について群を作ります。これは直交群 $O(n)$ と呼ばれます。

この直交群に「行列式=1」の条件をさらに加えたものが特殊直交群 $SO(n)$ で、これは先ほど出てきた回転行列のことですから、回転群とも呼ばれます。直交行列の定義から、$A^T A = E$(E は単位行列) であることを用いて、転置行列の行列式が元の行列と同じことに注意すると、

$$1 = det|E| = det|A^T A| = det|A^T| det|A| = det|A|^2 \tag{2.50}$$

より、$det|A| = \pm 1$ になります。このうち 1 のほうだけに限定したものが特殊直交群です。これは列ベクトルがなす正規直交系をが元の座標系を回転させたものだけに限定し、座標の反転は含まないようにすることになります。

次に複素行列の例を考えましょう。A の複素共役行列 $A^\dagger$(右上の記号は「ダガー」と読みます) を $(A^T)^*$ つまり転置してすべての要素を複素共役したものとして定義します。このとき、

$$A^\dagger = A^{-1} \tag{2.51}$$

となるものをユニタリー行列といい、これらが作る群をユニタリー群 $U(n)$ といいます。上と同じような議論で、このときユニタリー行列の行列式は絶対値 1（その意味で Unitary と呼ばれるわけですが）の複素数となります。さらに行列式を 1 に限定したものが特殊ユニタリー群 $SU(n)$ です。ユニタリー行列は量子力学で重要な意味をもつ行列です。

これらのほかにも実行列では交代行列（転置が元の行列の-1 倍になる）や、複素行列のエルミット行列など、群を作るものはたくさんありますが、このくらいにしておきます。

前節の議論を踏まえると、上に出てきた部分群のうち、$SO(2) = U(1)$ であることが言えます。ここで $U(1)$ は絶対値が 1 の複素数です。そのことを確認しておきましょう。いま、1 次元の複素正方行列とはただの複素数 z のことです。そして、

$$z^\dagger = z^*$$

ですから、条件 $z^\dagger = z^{-1}$ は、結局、$z^* z = 1$、すなわち絶対値が 1 であることと同じです。$SO(2)$ は上に書いたように 2 次の回転群ですから、両方とも 2 次元の回転を表していることになります。ここで重要なことは 2 次元の回転が可換であることに対応して、その表現である $SO(2)$ も $U(1)$ も可換だということです。次章以降でみる 3 次元の回転は可換ではありません。このことがそれを表す群の計算規則にも反映してきます。

以上に紹介したような行列のつくる群を**リー群**といいます。ここまで紹介したらリー代数についても触れるべきなのでしょうが、それはまた別の機会にしたいと思います。

2.4.4 まとめ

今回は、次の議論に入る前の準備として、計算のルールに着目した抽象代数学についてみていきました。その中で、「結合則・単位元・逆元」の 3 つの基本要素を持つものを群と呼んだのでした。そして「交換則」は一般には成り立たず、交換則が成り立つ特別な場合を加群と呼びました。

後半は、行列の作るリー群について触れました。そこでは 2 次元での回転を例にして、二つの群が同型になる場合をみました。

さて、次はいよいよ四元数の話に入ります。まずは最初の流れにそって、方程式や因数分解という方向から四元数へ迫ってみたいと思います。その上で、四元数の作る世界についていろいろな角度から掘り下げていくつもりです。

第3章　四元数の数学

3.1　$x^2+y^2+z^2$ は因数分解できるか？

キーワード：因数分解、四元数

序文でも少し触れましたが、そもそもこの文章を書く最初のインスピレーションは、今回の章でみる、因数分解と四元数の関係からでした。やっとここまできた、という感じです。ついに四元数が登場します。

まずは、四元数の発見の話からです。

3.1.1　因数分解の拡張

少し前の議論を思い出しましょう。中学で習う因数分解の公式（和と差の積）、

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

がありますが、x^2+y^2 は実数の範囲では因数分解できません。ですが、いまや方程式の解に複素数を許したのですから、因数分解の係数に複素数を許すことにしましょう。すると、

$$x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$$

と因数分解できます。もちろん、ここで i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ です。

では、さらに3つの変数にした $x^2+y^2+z^2$ は因数分解できるでしょうか？

いま、因数分解した x の係数を1とおいても一般性は失われませんので、次のように置きましょう。

$$x^2+y^2+z^2=(x+Ay+Bz)(x+Cy+Dz) \tag{3.1}$$

展開して係数を比べることによって、係数 A,B,C,D を決めます。

$$(x+Ay+Bz)(x+Cy+Dz)=x^2+ACy^2+BDz^2+(A+C)xy+(B+D)xz+(AD+BC)yz \tag{3.2}$$

です。最後の項はのちの議論のために、積の順番に気を付けてください。これが元の $x^2+y^2+z^2$ になるためには、

$$\begin{aligned}
AC &= 1 && (3.3)\\
BD &= 1 && (3.4)\\
A+C &= 0 && (3.5)\\
B+D &= 0 && (3.6)\\
AD+BC &= 0 && (3.7)
\end{aligned}$$

である必要があります。式(3.5)(3.6)より直ちに $C=-A, D=-B$ であることが分かります。これを式(**??**,(3.4)に代入すれば、$A^2=-1, B^2=-1$ となり、それぞれが虚数単位のような性質をもつべきことも分かります。そこで $A=B=i$ ということにすると、式(3.7)の左辺に代入すれば、

$$AD + BC = -i^2 - i^2 = -2i^2 = 2$$

となってしまい、うまく 0 になってくれません。そこで、$A = i$ としたうえで、もう一つ別の虚数単位があると仮定し、$B = j$ とおいてみます。実数に虚数単位を加えて複素数へと拡張したように、新しい要素を付け加えて数を拡張することによって、いままでできなかったことができるようになるのではないか、ということです。ただ、ここで問題になるのは、どのような要素を付け加えるのかということと、付け加えた際に首尾一貫して矛盾のない計算規則を作ることができるのかというです。

さて、2 つ目の虚数単位を付け加えたとして、そこでの計算規則はどういうものになるべきでしょうか。もし積の交換が成り立つならば、$AD + BC = -2ij$ となり 0 にはなりませんから、ここは前回の群の議論を踏まえ、交換則を捨ててアーベル群でなく普通の群であるとして、

$$ij + ji = 0 \tag{3.8}$$

という関係が成り立つと仮定します。つまり、積の順番を交換すると符号が逆になるとします（これが唯一の方法ではありませんが)。こうすることによって、とりあえず因数分解の条件は満たされました。

あとはこれが首尾一貫しているか確認しなければなりません。確認しなければならないことは、これがきちんと閉じた系になっているかということです。つまり式 (3.8) にでてきた積 ij がこの世界に収まっているか、ということを確認する必要があります。もしこの体系が積について閉じているならば、すべての数は複素数の拡張として、1 と i と j の 3 つをつかって $z = a + bi + cj$ と書けるはずです (係数 a, b, c はすべて実数)。そこで、上の式 (3.8) の ij もこの形にできるはずです。すなわち

$$ij = a + bi + cj \tag{3.9}$$

と書けるはずですから、この係数 a, b, c を決めてみましょう。いま ij の左から i をかけます。積の順番を勝手には替えられませんから、左からの積と右からの積を区別しなければならないことに注意しましょう。結合則はいまでも有効ですから、 $iij = (ii)j = -j$ です。一方、

$$iij = i(a + bi + cj) = ai + bi^2 + cij = ai - b + cij \tag{3.10}$$

です。これにもう一度 ij の表現を代入すれば、

$$iij = ai - b + c(a + bi + cj) = (ac - b) + (a + bc)i + c^2 j \tag{3.11}$$

これが $-j$ に等しくなるためには、$a = b = 0, c^2 = -1$ となりますが、最後の式は係数がすべて実数であると仮定したことと矛盾します。

よって、2 個目の虚数単位を導入しても首尾一貫した積について閉じている体系を作ることができないということが分かりました。つまり、3 変数の因数分解を可能にするような拡張はできないということです。

3.1.2　4 つ目の変数を導入

3 変数ではうまく数学を構成できないことは分かりました。これは 3 つ＜以上＞の変数で数学を構成できないということを意味するのでしょうか？3 つでだめなら 4 つにしてもだめなのではないか？と思うのは自然でしょう。しかし、19 世紀の数学者・物理学者であるハミルトンは、4 つ目の変数を導入し、虚数単位が 3 つあるとするとうまくいくことを発見したのです。

さっそく、前節の議論を拡張して 4 つの変数の場合を考えてみましょう。そして、その場合に必要とされる計算規則を導き出したいと思います（以下は、自分なりに計算してみた結果です。ハミルトンが実際どのような思考過程を経て四元数にたどり着いたのか、ということについては詳しく調べられていません)。

今度は、一つ変数を増やして、$w^2+x^2+y^2+z^2$ を因数分解することを考えます。同じように、

$$w^2+x^2+y^2+z^2=(w+Ax+By+Cz)(w+Dx+Ey+Fz) \tag{3.12}$$

と因数分解できると仮定します。展開して係数を比べることで、前節と同じような式が得られます。

$$\begin{aligned}
AD &= 1 && (3.13)\\
BE &= 1 && (3.14)\\
CF &= 1 && (3.15)\\
A+D &= 0 && (3.16)\\
B+E &= 0 && (3.17)\\
C+F &= 0 && (3.18)\\
AE+BD &= 0 && (3.19)\\
AF+CD &= 0 && (3.20)\\
BF+CE &= 0 && (3.21)
\end{aligned}$$

これらの数式から同様の議論で、3 つの虚数単位 i,j,k を用いて、

$$\begin{aligned}
A &= -D &= i && (3.22)\\
B &= -E &= j && (3.23)\\
C &= -F &= k && (3.24)
\end{aligned}$$

となり、これら 3 つの虚数単位どうしは、

$$\begin{aligned}
ij+ji &= 0 && (3.25)\\
jk+kj &= 0 && (3.26)\\
ki+ik &= 0 && (3.27)
\end{aligned}$$

という関係を満たしていればよいことが分かります。ここまでの計算は前節とほとんど同じなので確認してみてください。ここで 3 つの虚数単位がお互いに反交換（積を交換すると符号が逆になる）の関係にあることに注意してください。

さて、3 変数のときはけっきょく虚数単位どうしの関係を満たすようにうまく設定が作れなかったわけですが、今回はどうでしょうか。

前節と同じように ij などを $a+bi+cj+dk$ の形で求めていくこともできますが、今回は連立の形になり少々めんどうです。そこでいま、3 つの虚数単位の積 ijk を考えます。これが求まれば、$iijk=-jk$ などから、二つの虚数単位の積も計算することができます。たとえば式 (3.25) の右から k をかけて変形していきます。

$$\begin{aligned}
ijk+jik=0 && (3.28)\\
ijk-jki=0 && (3.29)\\
ijk+kji=0 && (3.30)\\
ijk=-kji && (3.31)
\end{aligned}$$

積を一つ入れ替えると符号が変わることに注意してください。よって、

$$(ijk)^2=(ijk)\cdot(ijk)=(ijk)\cdot(-kji)=-ij(kk)ji=+i(jj)i=-ii=1 \tag{3.32}$$

積の順番をひっくり返した上で、真ん中から結合させて $i^2=j^2=k^2=-1$ を用いて消したわけです。

よって、$(ijk)^2=1$ になることが分かりました。最初の文章では、「$ijk=\pm1$ とは四元数ではいえない」と書いたのですが、$x^2=-1$ の解は無数にありますが、$x^2=1$ の解は $x=\pm1$ だけでした。ですが、せっかくなので以下の議論は残します。ここでは ijk が実数であることを示したいと思います。

いま、 $ij=a+bi+cj+dk$ と書けると仮定します。ここで iji を計算してみると、

$$iji=(ij)i=ai-b+cji+dki \tag{3.33}$$

$$iji=i(ji)=-ai+b-cij-dik \tag{3.34}$$

と二通りの表し方があります。式 (3.34) では積の反交換性を使っています。この 2 式はどちらも同じものを計算しているわけですから、$a=b=0$ でなければいけません。同様に jij を計算することで $c=0$ もいうことができます。よって

$$ij=dk \tag{3.35}$$

であることが示せます。よって、 $ijk=dk^2=-d$ ということで、ijk は実数ということがわかりました。さらに、式 (3.32) によって $d^2=1$ ですから、$d=\pm1$ です。ここで、式 (3.35) を考慮して、$ij=k$ という形になるとすれば $d=1$ にするのがすっきりしそうです ($d=-1$ としたときは $ji=k$ としたということで、積の順番の違いでしかありません)。以上より、3 つの虚数単位どうしの関係は、

$$ijk=-1 \tag{3.36}$$

であればよいことが分かりました。これにより、虚数単位を 2 つ掛けた積は、

$$ij=k \tag{3.37}$$

$$jk=i \tag{3.38}$$

$$ki=j \tag{3.39}$$

という計算規則になり、一貫したものになることが確認されます。２つの虚数単位ではだめでしたが、３つ目を加えることによってうまく閉じた体系にすることができるのです。

こうして、4 変数の式 $w^2+x^2+y^2+z^2$ は、3 つの虚数単位 i,j,k を用いて

$$w^2+x^2+y^2+z^2=(w+ix+jy+kz)(w-ix-jy-kz) \tag{3.40}$$

と因数分解できることが分かりました。そしてここに現れる 3 つの虚数単位を用いて、$z=a+bi+cj+dk$ の形に表される数を四元数と呼びます。

3.1.3 まとめ

ついにこの文章のテーマである四元数にたどり着くことができました。3 つの変数では因数分解できないのに、4 つに増やすとできるようになるというのもなかなか不思議な話だと思います。しかし、群として一貫した計算規則を成立させるためには、その要素数（虚数単位の数）に条件が課されます。1 を含めて 2^n 個でなければならないのです。ですから 2（複素数）の次は 4（四元数）であり、その次は 8 元数となります。線形代数を勉強している段階では、次元の違いは線形独立な基底の個数の違いぐらいでしかないように思えますが、今回みたような代数的な性質のほかにも、位相幾何学的な性質、さらには微分構造など、次元の違いが本質的な違いになることも多いようです。

余談ですが、この因数分解の話は、物理学の相対論的量子力学をご存知の方なら、ディラック方程式の導出過程と同じということに気づかれたと思います。あれも、ダランベルシアンという 4 変数の 2 階

微分演算子を因数分解することにほかなりません。一般に、4 つの変数を因数分解するときには、4 以上の偶数次の行列が必要になり、これがディラック方程式に従う場が 4 成分のスピノールと呼ばれる量になることと関連してきます。この話については、最後の章でもう一度触れるつもりです。

さて次回は、四元数の計算についてもう少し詳しくみていきたいと思います。四元数どうしの積の計算法則や、共役・絶対値といったことについて考えます。そして、その計算規則が現代のベクトルの計算と非常に密接な関係にあることをみていきましょう。

3.2 四元数の計算規則

キーワード：四元数、共役、絶対値

今回は、前回導入した四元数の計算がどのように行われるのかということを見ていきましょう。四元数の 3 つの虚数単位どうしの計算規則から、四元数の計算規則を導いていきたいと思います。また、複素数と同じように共役・絶対値が定義できることを確認します。また、四元数を用いた場合に方程式がどのようになるか、ということについても若干の注意をしておきたいと思います。

3.2.1 和・差

以下の議論では、

$$p = a + bi + cj + dk \tag{3.41}$$

$$q = e + fi + gj + hk \tag{3.42}$$

とおく。

和と差については、各項ごとに計算すればいいので簡単です。

$$p + q = (a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)k \tag{3.43}$$

$$p - q = (a - e) + (b - f)i + (c - g)j + (d - h)k \tag{3.44}$$

$$\tag{3.45}$$

これについて、特に注意点はないでしょう。

3.2.2 積

四元数の積については若干計算がめんどうです。これを簡単にするルールについては次回でやるとして、ここでは基本の計算規則を用いて計算してみましょう。

$$pq = (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \tag{3.46}$$

$$= ae + a(fi + gj + hk) + e(bi + cj + dk) + (bi + cj + dk)(fi + gj + hk) \tag{3.47}$$

計算が長くなるので最後の項だけ計算してしまいましょう。

$$(bi + cj + dk)(fi + gj + hk) = bfi^2 + cgj^2 + dhk^2 + bgij + cfji + chjk + dgkj + dfki + bhik \tag{3.48}$$

$$= -bf - cg - dh + (bg - cf)k + (ch - dg)i + (df - bh)j \tag{3.49}$$

ここで $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ と $ij = k$ などを用いて変形しました。これを用いると

$$\begin{aligned} pq &= ae + a(fi + gj + hk) + e(bi + cj + dk) \\ &\quad -bf - cg - dh + (ch - dg)i + (df - bh)j + (bg - cf)k \end{aligned} \tag{3.50}$$

となります。これを見て、ベクトルの演算を知っている方はぴんとくるものがあるかもしれません。ですが、その話は次回のテーマとさせてもらいます。複素数と比べてもかなりややこしい計算になっていますが、これを整理する方法はありますので、今回はまず四則演算がきちんとできて閉じていることを確認してしまいましょう。また、別に計算した 2 行目の四元数になる部分については、積の順番を交換すると符号が変わります。四元単位 i, j, k の積が交換しないことの影響で、一般に四元数の積は交換しません。

3.2.3 共役と絶対値

次に共役を定義しましょう。前回の因数分解の議論を踏まえれば、共役な四元数を

$$p^* = a - bi - cj - dk \tag{3.51}$$

と定義すれば

$$p^*p = pp^* = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{3.52}$$

となりますので、これを四元数の共役として問題なさそうです。上に書いたように、一般に四元数の積の順番は交換できませんが、それは結果に四元単位が現れるときだけです。結果が実数になる共役四元数との積は交換可能です。

またここに出てきた右辺の実数を、三平方の定理を踏まえれば四元数の「長さ」とみなしてよさそうです。これを絶対値といい、

$$|p| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \tag{3.53}$$

で定義します。ここは複素数の自然な拡張として理解しやすいと思います。

3.2.4 逆元の存在と商

以上の道具立てを用いて、商（割り算）を定義しましょう。

まずは、積の逆元を求めます。つまり、0 でない四元数 p に対して、

$$pp^{-1} = p^{-1}p = 1 \tag{3.54}$$

となるような逆元 p^{-1} を求めてみましょう。といっても、前節の議論を用いれば複素数と同様に、

$$p^{-1} = \frac{1}{|p|^2}p^* = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - bi - cj - dk) \tag{3.55}$$

と定義すれば、これが式 (3.54) を満たすことはすぐ確認できるでしょう。

これを持ちいれば、

$$\frac{q}{p} = \frac{(e + fi + gj + hk)(a - bi - cj - dk)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \tag{3.56}$$

となって、商が計算できます。

以上で、四元数に関しての和・差・積・商が定義でき、すべて四元数の中で閉じていることが確認できたと思います。

3.2.5　$p^2 = -1$ の解

今回の話の最後に、四元数の困った性質について触れておきます。これは前回ちょっとだけ注意事項としてふれたことです。

いま四元数に関する方程式

$$p^2 = -1 \tag{3.57}$$

を考えます。積の定義に当てはめると、

$$\begin{aligned} p^2 &= aa + a(bi + cj + dk) + a(bi + cj + dk) \\ &\quad -bb - cc - dd + (cd - dc)i + (db - bd)j + (bc - cb)k \qquad (3.58) \\ &= a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2a(bi + cj + dk) \qquad (3.59) \end{aligned}$$

これを見れば、$a = 0$ の「純虚」四元数ならば、絶対値 1 にすると自動的に $p^2 = -1$ になることが分かります。つまり、

$$a = 0, b^2 + c^2 + d^2 = 1 \tag{3.60}$$

を満たす四元数はすべて方程式 (3.57) を満たします。

このように四元数では「代数学の基本定理」が成立しない。そういう意味ではすこしやっかいです。

3.2.6　まとめ

今回は四元数の基本計算だったので少々退屈だったかもしれません。四元数において、複素数の拡張として四則演算を定義できることを確認したわけですが、とくに積のところは計算が複雑です。これが何を表しているのかなかなかイメージがつかみにくいかもしれません。次回は、この四元数の積に注目して、ベクトル演算との関係を用いて四元数の計算を見通し良く行う方法を見ていきたいと思います。

3.3　四元数とベクトルの演算—内積・外積との関係

キーワード : 四元数、ベクトル、内積、外積

前回は、四元数の計算規則を確認しました。今回は、特に積の計算をベクトルとの関係で見通し良くする方法について見ていきたいと思います。

3.3.1　四元数の積とベクトルの積

前回も計算した純虚四元数の積を再掲します。

$$(bi + cj + dk)(fi + gj + hk) = -bf - cg - dh + (ch - dg)i + (df - bh)j + (bg - cf)k \tag{3.61}$$

いま、二つの 3 次元ベクトルを $\vec{v} = (b, c, d), \vec{w} = (f, g, h)$ とおきます。

ベクトルの内積 $\vec{v} \cdot \vec{w}$ と外積 $\vec{v} \times \vec{w}$ は、

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= bf + cg + dh \qquad (3.62) \\ \vec{v} \times \vec{w} &= (ch - dg, df - bh, bg - cf) \qquad (3.63) \end{aligned}$$

で、定義されます。これを見ると、それぞれが四元数の積において普通の数の部分と虚数単位がついている部分とになっていることが分かると思います。

そこで、四元数 $p = a + bi + cj + dk$ をスカラー a とベクトル $\vec{v} = (b, c, d)$ を用いて、

$$p = (a, \vec{v}) \tag{3.64}$$

とあらわし、それぞれをスカラー部分、ベクトル部分と呼ぶことにします。これを用いると、

$$
\begin{aligned}
pq &= (a,\vec{v})(e,\vec{w}) && (3.65)\\
&= (ae-\vec{v}\cdot\vec{w}, a\vec{w}+e\vec{v}+\vec{v}\times\vec{w}) && (3.66)
\end{aligned}
$$

となることが分かります。こうしてみると、かなりすっきりすると思います。また、共役と絶対値はそれぞれ、

$$
\begin{aligned}
p^* &= (a,-\vec{v}) && (3.67)\\
|p| &= a^2+|\vec{v}|^2 && (3.68)
\end{aligned}
$$

となります。

3.3.2 積と絶対値

前回、四元数の絶対値を導入したわけですが、一つ証明していないことがありました。それは積の絶対値がそれぞれの絶対値の積になるのかどうか、ということです。つまり、

$$|pq| = |p||q| \tag{3.69}$$

が成立するか、ということです。

たとえば、ベクトルのスカラー積、ベクトル積はそれぞれ、

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |v||w|\cos\theta \tag{3.70}$$

$$|\vec{v}\times\vec{w}| = |v||w|\sin\theta \tag{3.71}$$

の関係があります（ここで θ は二つのベクトルのなす角)。積の絶対値がそれぞれの積とは異なるわけです。

いまここで、式 (3.69) の両辺を 2 乗して、スカラー部、ベクトル部を用いて表してみますす。

$$|pq|^2 = (ae-\vec{v}\cdot\vec{w})^2 + |a\vec{v}+e\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}|^2 \tag{3.72}$$

$$|p|^2|q|^2 = (a^2+|\vec{v}|^2)(e^2+|\vec{w}|^2) \tag{3.73}$$

この二つが果たして同じになるのかということです。以下、見やすさのために $v=|\vec{v}|$ などと書きます。

一つ一つ計算していきましょう。

$$(ae-\vec{v}\cdot\vec{w})^2 = a^2e^2 - 2aevw\cos\theta + v^2w^2\cos^2\theta \tag{3.74}$$

$$
\begin{aligned}
& |a\vec{w}+e\vec{v}+\vec{v}\times\vec{w}|^2 \\
= & a^2w^2+e^2v^2+|\vec{v}\times\vec{w}|^2+2\{a\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})+ae\vec{v}\cdot\vec{w}+e\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\} && (3.75)
\end{aligned}
$$

ここでベクトルの内積と外積の性質を使います。外積 $\vec{v}\times\vec{w}$ は、もとの 2 つのベクトルに対して垂直であること、垂直な 2 つのベクトルの内積は 0 になることを持ちいれば、$\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0$ となるので、

$$(3.75) = a^2w^2+e^2v^2+v^2w^2\sin^2\theta+2aevw\cos\theta \tag{3.76}$$

とまとめることができます。ここで成分でなく大きさと角度を用いた表現をしました。こちらのほうが計算の見通しがよくなります。

以上の結果を用いれば、

$$
\begin{aligned}
|pq|^2 &= (ae - \vec{v}\cdot\vec{w})^2 + |a\vec{v} + e\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}|^2 \\
&= (a^2e^2 - 2aevw\cos\theta + v^2w^2\cos^2\theta) \\
&\quad +(a^2w^2 + e^2v^2 + v^2w^2\sin^2\theta + 2aevw\cos\theta) \\
&= a^2e^2 + a^2w^2 + e^2v^2 + v^2w^2 \\
&= (a^2+v^2)(b^2+w^2) \\
&= |p|^2|q|^2 \qquad (3.77)
\end{aligned}
$$

となることが確認できました。2 行目から 3 行目はプラスとマイナスの項が打ち消し合い、三角関数の性質 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いました。これは成分だけの計算ですと項の数が多くなり分かりにくくなります。ベクトルの計算を用いることで計算が楽になりました（それもあって今回に回したのですが）。

さて、前回の予告では 3 重積について書く、と言ったのですが、3 重積自体の説明が難しくまだ整理できていないので、これについては保留というか、別の文章として線形代数のシリーズを作るときに反映させたいと思います。

その代りと言ってはなんですが、今回の最後に、四元数を「2 重の複素数」として表すこと、そしてそこから量子力学で現れる「パウリ行列」との関係について示しておきたいと思います。

3.3.3 2 重の複素数としての四元数と四元数の複素行列表示

$a + bi + cj + dk$ において、四元虚数単位どうしの関係 $ij = k$ を考慮すると、

$$
\begin{aligned}
a + bi + cj + dk = &\quad a + bi + cj + dij \\
=&(a + bi) + (c + di)j \qquad (3.78)
\end{aligned}
$$

つまり、複素数の中にもう一つ複素数が入っているような形になっています。そこで、第 8 回での議論を思いだし、j を行列にして、

$$
(a+bi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (c+di)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.79)
$$

とできるかというとこれはうまくいきません。それは今までの議論からわかるように、これでは四元数の反可換性を再現できていないからです。それでは i の方も何か行列で表して、反可換性をもつようにできるでしょうか。いま 2 行 2 列の行列が、$ij = -ji$ の関係を満たすように決めてみましょう。

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \qquad (3.80)
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \qquad (3.81)
$$

これが反交換するためには $a = -d, b = c$ であればよいことがわかります。また 2 乗して単位行列の-1 倍になるという性質も必要です。このような性質を持つ行列には任意性がありますが、もともと四元数を 2 重の複素数として表現した式を再現したいわけですから、それにもっとも近い形にするのが自然でしょう。そこで式 (3.79) は、虚数単位を行列 I で書くならば、

$$
I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad (3.82)
$$

としていたことになりますから、これを、

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

と変更するのがもっとも修正の少ない形です。これを用いれば、

$$K = IJ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

となります。こうすると四元数を表す行列として、

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \tag{3.85}$$

という形が得られますから、これは二つの複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ を用いれば、

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

という複素行列で四元数が表現できるということが分かりました。ここではこれ以上この行列の性質には触れませんが、和・差はもちろん、積や絶対値といったものもきちんと再現できます。たとえば、上の行列の行列式が四元数の絶対値を表すことは簡単に計算できると思います。そして行列の積と行列式の性質（積の行列式＝行列式の積）を用いれば、前節で導いた絶対値と積の関係が容易に示せます。

ここで現れた 3 つの行列 I, J, K は、物理学ではスピンの性質を表すために登場し、パウリ行列という名前がついています。複素数が 2 次元の回転を表していたのと同様に、四元数もなんらかの回転と関係していそうです。これは次回のテーマになります。

3.3.4 まとめ

今回は、四元数を最初スカラー＋ 3 次元ベクトルという形にわけ、その積の計算の意味づけを行いました。後半では、四元数を 2 つの複素数で表現してみました。このように 4 つの次元を 1+3 とみるか、2+2 とみるかは扱う問題の性質でことなってくるわけです。

現代の視点からは、今回みたように四元数は非可換の代数の一つとして理解され、またベクトルの演算との関連から整理されています。しかし、1843 年にハミルトンが四元数を発見したときは、「交換則を捨てる」という大きな変革を記す第一歩として大きな意義があったと思います。

一方、ベクトルやその内積・外積の概念が出てくるのは四元数発見の翌年、1844 年のことです。この年、グラスマンは「拡大論」を発表し、いまでいうところの線形空間論を構築しました。この中で一次独立などの概念ばかりでなく、内積・外積といった演算も導入しています。グラスマンは、数学上で線形代数や代数学の抽象化への道を作ったばかりでなく、外積を用いて正しく磁場と電流の間に働く力に関する式をたて、これが作用・反作用の関係を満たさないことを初めて示すなど、今に残る大きな仕事をたくさんしています（光の三原色の法則からサンスクリット語の研究までその業績は幅広い)。ですが発表当時、グラスマンの本は広く受け入れられたわけではなかったようです。そのせいか、いまでもグラスマンの名前はあまり有名とはいえません。私自身、場の量子論で「グラスマン数」というのを見るまで名前すら知りませんでした。最初にみたときは「グラスマンって誰？」と思ったぐらいです。後になって、数学・物理学の歴史、とくに電磁気学の歴史を調べる中でグラスマンの「偉大さ」に気付いたわけですが、もっと評価されてもいいのではないかと思います（残念ながら、日本語で読める資料は多いとは言えませんが)。

四元数の方は一時期大きく取り上げられ、マクスウェルが電磁気学の初期に用いたりしました。ハミルトンも、四元数を用いて物理学を書き換えるという壮大な事業に取り掛かりました。しかし、時代は

ハミルトン・グラスマンらのアイディアに触発されて大きく進み、結局テンソル解析（ベクトル・行列の微分・積分、微分幾何など）が発達して、その上に現代物理学が構築されていくことになります。

さて、次回はついにこの文章の最終テーマ「四元数と回転」についてです。一度は忘れられた四元数が、現代の 3D グラフィックスの世界によみがえることになったのは、四元数の演算が 3 次元における回転を効率よく表現できるからです。これは今回の前半のように 1+3 と分解して考えることによってその意味が明らかになります。次回ではまず最初に回転をどう表現するかという話からはじめ、次にそれを四元数を用いて記述するという形で展開していきたいと思います。

3.4 四元数と 3 次元の回転

キーワード：四元数、回転

今回はこの文章の一番の目的である「四元数を用いた 3 次元回転の表現」についてがテーマです。まずは四元数の積の構造を崩さないような変換がどのような形になるのかを見た上で、それの特別な場合が鏡映変換になることを示します。次に回転を鏡映変換の合成として考える方法を解説します。そしてそれをもとに回転を四元数で表す方法を作ります。

3.4.1 四元数の合同変換

いま四元数の中での変換として次の 2 つの条件を満たすものを考えます。

- 線型であること。つまり $f(ax+by) = af(x) + bf(y)$(ここで a, b は複素数,x, y は四元数)
- 積について「同型」であること。つまり $f(xy) = f(x)f(y)$

2 つ目の条件について少し考えてみましょう。たとえば、四元数を単純に掛けただけの変換を考えると、これは第 1 の線型性は満たしていますが、掛ける四元数を n とおくと（つまり $f(x) = nx$)、

$$f(xy) = nxy$$

一方、

$$f(x)f(y) = nxny$$

となり、積についての同型にはなっていません。そこで四元数とそれの逆元になっている四元数で挟んだ変換を考えます。

$$f(x) = nxn^{-1} \tag{3.87}$$

これならば、

$$f(xy) = nxyn^{-1} = nxn^{-1}nyn^{-1} = f(x)f(y) \tag{3.88}$$

となって、同型になります。これが線型性をもつこともすぐに確認できると思います。このような変換を合同変換と呼びます。

いま、あるベクトル $a = (0, \vec{a})$ を単位ベクトル $\vec{n}$ に相当する純四元数 $n = (0, \vec{n})$ で合同変換するとどうなるか調べてみましょう。

まず第 1 段階、

$$an^{-1} = (0, \vec{a}) \cdot (0, -\vec{n}) = (\vec{a} \cdot \vec{n}, -\vec{a} \times \vec{n}) \tag{3.89}$$

これに左から n を乗じれば、

$$\begin{aligned} nan^{-1} &= (0, \vec{n}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{n}, -\vec{a} \times \vec{n}) && (3.90) \\ &= (\vec{n} \cdot (\vec{a} \times \vec{n}), (\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n})) && (3.91) \end{aligned}$$

スカラー部については、$\vec{a}\times\vec{n}$ が $\vec{n}$ と直交するので 0 になります。

ベクトル部については、ベクトル 3 重積の公式 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ を用いて、

$$\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})=(\vec{n}\cdot\vec{n})\vec{a}-(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}=\vec{a}-(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n} \tag{3.92}$$

より、

$$(\vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}-\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n}=(\vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}-(\vec{a}-(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n})=2(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}-\vec{a} \tag{3.93}$$

これの幾何学的な意味を考えてみましょう。分かりやすいように正負を入れ替えて $\vec{a}-2(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}$ について考えます。

単位ベクトルとの内積はその方向への射影を表しますから、$(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}$ はベクトル $\vec{a}$ を $\vec{n}$ の方向に分解したベクトルになります。よって、$\vec{a}-(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}$ であれば $\vec{a}$ を $\vec{n}$ と直交する方向へ分解したベクトルになるはずです。いま考えているベクトルはさらにもう一つ $(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n}$ を引いたものですから、これは $\vec{n}$ と垂直な平面での「鏡映変換」になっています（図参照）。

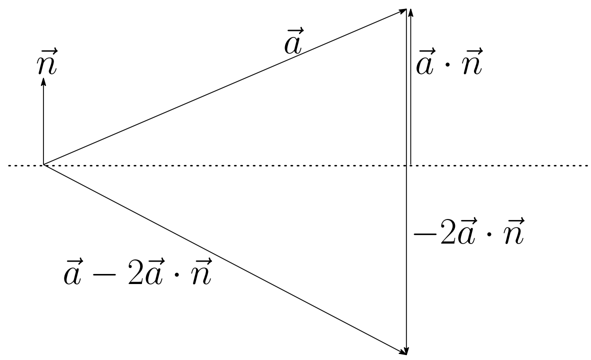

図 3.1: 各ベクトルの関係

つまり、**純虚四元数での合同変換は鏡映変換を表す**ということが分かりました。

ただし、途中で正負を入れ替えていますから、$-nan^{-1}$ となっていることに注意してください。

3.4.2　鏡映変換と回転

この節では幾何学的な考察を少し加えます。

異なる二つの平面による鏡映変換を合成することを考えます。

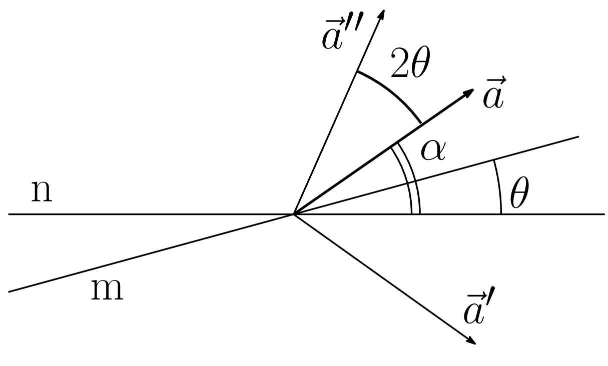

図 3.2: 鏡映変換を繰り返すと回転になる

図を参照していただきたいのですが、二つの平面 m, n があって、それぞれの法線ベクトルを $\vec{m}, \vec{n}$ とします (図では法線ベクトルは省略しています)。このとき、2 つの平面のなす角（それはそれぞれの平面の法線がなす角でもある）を θ とおきます。

元のベクトル $\vec{a}$ が最初の平面 n となす角を α とおくと、2 つ目の平面 m とベクトル $\vec{a}'$ がなす角は $\theta+\alpha$ です。よって、$\vec{a}''$ と平面 m の角も同じく $\theta+\alpha$ です。また、平面 m と元のベクトル $\vec{a}$ のなす角は $\theta-\alpha$ です。よって、$\vec{a}$ と $\vec{a}''$ がなす角は $(\theta+\alpha)+(\theta-\alpha)=2\theta$ になるわけです。

このことを四元数で表現してみましょう。

鏡映変換は合同変換によって表されたので、その合成は、

$$-m(-nan^{-1})m^{-1}=(mn)a(mn)^{-1}$$

です。鏡映変換にするために付けたマイナス符号ですが、合成することで消えてしまいます。次にこの四元数 mn を求め、それの意味するところを考えましょう。

これは、$m=(0,\vec{m}), n=(0,\vec{n})$ とおけば、$mn=(-\vec{n}\cdot\vec{m},\vec{m}\times\vec{n})$ ですから、先の θ を用いて $mn=-(\cos\theta,\vec{l}\sin\theta)$ と書けます。ここで $\vec{l}=\vec{n}\times\vec{m}$ は $\vec{m}$ と $\vec{n}$ に直交する方向の単位ベクトルで、回転軸方向を表すベクトルです。符号と外積の順番に注意が必要です。マイナスが付きますが、合同変換の式にいれるとマイナスが 2 つになってキャンセルするので、負号の存在は変換の結果に影響を与えません。これが 2θ の回転を表すわけですから、θ の回転をさせたい場合は、

$$r=(\cos\frac{1}{2}\theta,\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta) \tag{3.94}$$

を用いて合同変換 rar^{-1} を施せばよいということになります。

3.4.3 実際に回転になっているか確かめる

前節までの「鏡映変換の合成としての回転」は、式 (3.94) を用いた合同変換というのを天下り的に提示することに抵抗があってその導出のようなことをやってみたわけですが、直接これが回転を表していることを示しましょう。

$$\begin{aligned}
ar^{-1} &= (0,\vec{a})\cdot(\cos\frac{1}{2}\theta,-\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta) && (3.95)\\
&= (\vec{a}\cdot\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta,\vec{a}\cos\frac{1}{2}\theta-\vec{a}\times\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta) && (3.96)\\
rar^{-1} &= (\cos\frac{1}{2}\theta,\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta,\vec{a}\cos\frac{1}{2}\theta-\vec{a}\times\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta) && (3.97)\\
&= (\vec{a}\cdot\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta-\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\cdot(\vec{a}\cos\frac{1}{2}\theta-\vec{a}\times\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta), && (3.98)\\
&\quad \vec{a}\cos^2\frac{1}{2}\theta-\vec{a}\times\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta+\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\times(\vec{a}\cos\frac{1}{2}\theta-\vec{a}\times\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta)) && (3.99)
\end{aligned}$$

ここでスカラー部だけ計算すると、

$$\begin{aligned}
&\vec{a}\cdot\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta-\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\cdot(\vec{a}\cos\frac{1}{2}\theta-\vec{a}\times\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta && (3.100)\\
=\ &\vec{a}\cdot\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta-\vec{l}\cdot\vec{a}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta-\vec{l}\cdot(\vec{a}\times\vec{l})\sin^2\frac{1}{2}\theta && (3.101)\\
=\ &0 && (3.102)
\end{aligned}$$

ここで第 3 項は直交するベクトルの内積により 0 になることを用いています。

次にベクトル部を計算しましょう。

$$
\begin{aligned}
& \vec{a}\cos^2\frac{1}{2}\theta - \vec{a}\times\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta + \vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\times(\vec{a}\cos\frac{1}{2}\theta - \vec{a}\times\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta) && (3.103)\\
= & \vec{a}\cos^2\frac{1}{2}\theta - \vec{a}\times\vec{l}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta + \vec{l}\times\vec{a}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \vec{l}\times(\vec{a}\times\vec{l})\sin^2\frac{1}{2}\theta && (3.104)\\
= & \vec{a}\cos^2\frac{1}{2}\theta + 2\vec{l}\times\vec{a}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta - (\vec{a} - (\vec{l}\cdot\vec{a})\vec{l})\sin^2\frac{1}{2}\theta && (3.105)\\
= & \vec{a}(\cos^2\frac{1}{2}\theta - \sin^2\frac{1}{2}\theta) + 2\vec{l}\times\vec{a}\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta + (\vec{l}\cdot\vec{a})\vec{l})\sin^2\frac{1}{2}\theta && (3.106)\\
= & \vec{a}\cos\theta + \vec{l}\times\vec{a}\sin\theta + (\vec{l}\cdot\vec{a})\vec{l}(1-\cos\theta) && (3.107)\\
= & (\vec{l}\cdot\vec{a})\vec{l} + (\vec{a} - (\vec{l}\cdot\vec{a})\vec{l})\cos\theta + \vec{l}\times\vec{a}\sin\theta && (3.108)
\end{aligned}
$$

ここで式 (3.105) ではベクトル 3 重積の公式を用いています。また、式 (3.107) への変形では倍角公式・半角公式を用い、式 (3.108) では三角関数で式をまとめなおしています。

さて、この最後の式がベクトルの回転を表していることを確認してみましょう。以下、簡略化のために、それぞれのベクトルに、

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= \vec{a} - (\vec{l}\cdot\vec{a})\vec{l} && (3.109)\\
\vec{y} &= \vec{l}\times\vec{a} && (3.110)\\
\vec{z} &= (\vec{l}\cdot\vec{a})\vec{l} && (3.111)
\end{aligned}
$$

と名前を付けておくことにします。まずベクトル $\vec{z}$ は、内積の性質からベクトル $\vec{a}$ のベクトル $\vec{l}$ 方向への射影になっています。よって、ベクトル $\vec{x}$ はベクトル $\vec{a}$ からベクトル $\vec{z}$ を引いたものですから、ベクトル $\vec{a}$ のうちベクトル $\vec{l}$ に直交する成分を表しています。また、外積の性質 $\vec{l}\times\vec{l}=0$ より、

$$
\vec{l}\times\vec{x} = \vec{l}\times(\vec{a} - (\vec{l}\cdot\vec{a})\vec{l}) = \vec{l}\times\vec{a} = \vec{y} \qquad (3.112)
$$

となり、ベクトル $\vec{y}$ はベクトル $\vec{x}$ をベクトル $\vec{l}$ を中心に 90 度回転させたベクトルということになります。結局、この 3 つのベクトルは互いに直交する 3 つのベクトルになります。よって、式 (3.108) の最後の 2 項は、$\vec{x}\cos\theta + \vec{y}\sin\theta$ であり、直交する部分だけ回転したものになっていることが分かります。

以上の計算により、実際に合同変換 rar^{-1} がベクトルの回転を表していることを確認できました。

3.4.4 まとめ

今回の計算はベクトルの内積・外積の性質を何度も使う大変なものでしたが、ベクトルの幾何学的イメージをできる限り残して議論することに力点をおきました。式 (3.94) のような四元数がどこからくるのか、それが実際にどうやって回転を生み出すのか、ということをみることができたと思いますが、最初の合同変換の導入にまだ天下り感が残ります。これについては今後の改訂での課題とさせていただきたいと思います。

さて、これで四元数の話はほとんど終わりました。次回は全体のまとめとして少し物理との関連を書いておきたいと思います。といっても当初予定していたパウリ行列の話をすでに書いてしまったので、ネタがないというのが現状です。ネタの準備に少し時間がかかるかもしれません。