変位電流とは何か？

サンマヤ

平成 24 年 6 月 28 日

この文章は、電磁気学においてマクスウェルが最後に「発見」した「変位電流」について、それが結局なにを表現したものなのかということについて論じる。

1　マクスウェル方程式と変位電流

アンペールの法則において、変位電流の項はマクスウェルが「電荷保存則」と矛盾がないように理論的に付け加えた項であり、この項の発見がマクスウェル方程式から電磁波の方程式を導くための決定的な最後の一歩となった。

具体的には、アンペールの法則、

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{1}$$

の両辺の発散をとると、左辺はベクトル解析の公式により（回転の発散は常に 0 となる）0 となるので、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

を与えてしまい、電流の発散が常に 0 という、電荷保存則と矛盾した結果となってしまう。ここで、電荷保存則とは、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{2}$$

のことを言う。そこで、マクスウェルはアンペールの法則を変更し、

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{3}$$

とした。

マクスウェルは、当初電磁場の媒質としてのエーテルを実体的なものとしてとらえており、電場の存在に対してエーテルの電気的分極が起こり、それが真空中でも「電気変位」$\boldsymbol{D}$を与えると考えていた。マクスウェルが付け加えた項は、透磁率 μ_0 を除くとちょうど電流の次元をもっており、

$$\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

と書けることから、物質の分極の変化が電流を伴うのと同様に、真空中であっても電気変位（エーテルの分極）の変化が実体的な電流としての効果を持つと考え、この項に「変位電流」の名前を与えた。

しかし、現代ではこのようなエーテルの概念は否定されている。では、この「変位電流」の項はどのように解釈可能なのだろうか？

2　電磁場方程式の共変形式

以下の議論では、古典的な電磁場について扱うが、量子力学や場の量子論での知見を踏まえて、電磁場を表す基本量として四元ポテンシャルを採用する。[1]。

以下、相対論的な共変性のもとで議論し、

$$x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

$$A_0 = \frac{\phi}{c}, A_1 = A_x, A_2 = A_y, A_3 = A_z$$

とおく。ここで、ϕ は電磁場のスカラー・ポテンシャル、A はベクトル・ポテンシャルである。添字の上げ下げは、ミンコフスキー計量にしたがう。

$$-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

また、ローレンツ・ゲージのもとで議論を進める[2]。

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{4}$$

注意すべきは、微分は添え字が逆になり、

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = g^{\mu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{5}$$

なので、空間座標での微分は実質的に負号がつくことである。

四元電流ベクトル $J_0 = c\rho, J_1 = J_x, J_2 = J_y, J_3 = J_z$ を用いると、

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = \mu_0 J_\nu \tag{6}$$

少し前置きが長くなったが、ここで電磁場テンソル F を導入する。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{7}$$

通常の電磁気学におけるポテンシャルと電磁場との関係を用いれば、これが

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

と、通常の電場・磁場と結び付けられることが確認できる。

これらから、どのようにマクスウェル方程式を再現できるか？マクスウェル方程式を再現するだけならば、上記ポテンシャルと電流の関係式 (6) にローレンツ条件とその時間微

[1]古典論の範囲においてはポテンシャルでしか表せない現象はなく、AB 効果などにおいても結局現れるのは「磁束」であるので、実体的な電磁場はあくまで電場・磁場であるという意見もあるだろう。しかし、これから展開する共変的な電磁場の理論体系において、ポテンシャルが四元ベクトルであり場の量はポテンシャルからつくられる 2 階のテンソルであること、また、物質（電荷・電流）と直接結びつけられるのもポテンシャルであることから、ポテンシャルの方をより基本的な量である、ということにしておく

[2]以下の数式ではアインシュタインの規約に従うものとする。すなわち、上下に同じ添え字が現れた場合、これらについて 0〜3 の和を取るものと約束する。

分・勾配がともに0になることを加えるだけで可能である。だが、直接電磁場の量が共変的な形式でどのように表されるかというと、まず、ファラデーの法則と磁場に関するガウスの法則は、

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \tag{9}$$

この式は、F が反対称テンソルであることからくる、いわゆる「ビアンキの恒等式」であり、物理法則というより数学的な式である[3]。

一方、電荷・電流密度がからむクーロンの法則とアンペールの法則は次のような形になる。

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\nu \tag{10}$$

これは、電磁場テンソルの4元的発散が、電荷・電流密度より与えられることを意味している。

変位電流もこの式に含まれる。たとえば、$\nu = 1$ のとき、

$$\partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} = \mu_0 J_1 \tag{11}$$

これを、なじみの形に直すと、左辺は、

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + 0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \tag{12}$$

となり、アンペール・マクスウェルの法則を再現する。

ここに現れた第1項、変位電流に相当する項は、共変形の方程式から自然に出てくる項であり、いわば方程式が共変性を保つために必要な項のひとつであると考えられる。もしこれが、何か独立で「電流」を表すならば、ローレンツ変換によって独立に変換する四元変位電流のようなもののベクトル部として定義され、その結果、「変位電荷」が定義されなければならないがそのようなものは存在しない。この項は「テンソルの発散」の一つの成分であり、ここだけをほかと分離して考えることは不適当である。よって、あくまで場の方程式の共変性を担保する項の一つとして認識すべきである。

変位電流の項には $1/c^2$ の係数がかかっており、非常に小さいものである。これもこの項が相対論的な効果を表すものであることの一つの表れである。相対論以前のマクスウェルがこの項に正しい解釈を与ええなかったのも無理はないことに思われる。だが、相対論を考慮した共変的な形式で理論をとらえるならば、この項の意味は以上のように明らかなことだと思われる。

[3] ただし、もし磁気モノポールが存在する場合は事情が変わるが、ここでは詳しくは論じない。現状においては磁気モノポールは存在しないものとして議論をする。