第 10 章

電磁場の共変形式

前章では、電磁場の諸量がローレンツ変換によって、どのように変換するかを見ていきました。さまざまな物理量がローレンツ変換に対して、スカラーあるいは四元ベクトルになりましたが、電場・磁場の変換だけはその枠組みに入りませんでした。この章では、その電場・磁場の変換性が四元テンソルになっていることを確認します。そして、マクスウェルの方程式を共変形式で書き直し、解析力学の中に電磁場の法則を取り込むことを試みたいと思います。

10.1　電磁場テンソル

電場・磁場の変換性のなぞを考えるために、出発点として四元ベクトルであることが分かっているポテンシャルの方面から攻めることにしましょう。

電場と電磁ポテンシャルの関係式

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\nabla\phi - \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{A}}}{\partial t} \tag{10.1}$$

について成分ごとに考えて、共変形式に表してみます。たとえば、x 成分は、

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{c} &= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\phi}{c} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} && (10.2)\\ &= -\partial_1 A^0 - \partial_0 A^1 && (10.3)\\ &= \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 && (10.4)\\ &= -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) && (10.5) \end{aligned}$$

となります。ここで微分については $\partial_0 = \partial^0, \partial_i = -\partial^i (i = 1, 2, 3)$ となることを使っています。

一方、磁場については、

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{A}} \tag{10.6}$$

ですが、これを四元ベクトルの成分で書けば、

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} && (10.7)\\ &= \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 && (10.8)\\ &= -\partial^2 A^3 + \partial^3 A^2 && (10.9)\\ &= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) && (10.10) \end{aligned}$$

となります。

これを踏まえると、新しい反対称テンソル $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ を定義すると、これの成分は電場・磁場であらわすことができて、

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

というテンソルになることが分かる（これのテンソル性は定義がベクトルの積によって作られていることによる）。

つまり、いままで電場・磁場はそれぞれがベクトルだと考えてきましたが、実は一つのテンソルの成分として表されるということが分かりました。これが前章の電場・磁場の変換がほかの四元ベクトルと違った理由です。これはテンソルなので、

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\lambda}F^{\rho\lambda} \tag{10.12}$$

という変換になります。このテンソルを電磁場テンソルといいます。

10.2 マクスウェル方程式の共変形式

これで、電磁場に関わるもろもろの物理量について、その共変形式での表現が明らかになりました。これらを用いて、マクスウェル方程式を共変形式で書き表していきたいと思います。

ポテンシャルの方程式については、前章でみたように、ローレンツ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ のもと、

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu \tag{10.13}$$

となるのでした。

マクスウェル方程式を右辺が 0 のものと、物質の項を含むものとに分けて考えます。

電場に関するガウスの法則についてみると、左辺は、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathrm{E}} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} && (10.14) \\ &= 0 + \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 && (10.15) \\ &= \partial_\mu F^{\mu 0} && (10.16) \end{aligned}$$

となりますから、ガウスの法則は

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \tag{10.17}$$

と書けます。そこで、右辺の ν が 0 以外の場合にどうなるか調べてみましょう。

たとえば $\nu = 1$ について具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 1} &= \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} && (10.18) \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + 0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} && (10.19) \\ &= \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{B}} \right)_x = \mu_0 j^1 && (10.20) \end{aligned}$$

となって、これはアンペール・マクスウェルの法則と対応していることが分かります。よって、ガウスの法則とアンペール・マクスウェルの法則は、共変形式では一つの式、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{10.21}$$

にまとめられることが分かりました。

次に物質の項を含まない方程式について考えましょう。磁荷不在の法則は、左辺が、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B}} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} && (10.22) \\ &= \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 && (10.23) \\ &= \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} && (10.24) \\ &= -(\partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} + \partial_3 F^{12}) && (10.25) \end{aligned}$$

となりますので、これは

$$\partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} + \partial_3 F^{12} = 0 \tag{10.26}$$

と書けます。実は、反対称なテンソルならば必ず、

$$\partial_\mu F^{\nu\rho} + \partial_\nu F^{\rho\mu} + \partial_\rho F^{\mu\nu} = 0 \tag{10.27}$$

が成り立つことが知られています。これはビアンキの恒等式と呼ばれているもので、磁荷不在の法則はこれの時間成分を含まないものです。

では、これの時間成分を含むものはどうなるでしょうか。例えば、$(\mu, \nu, \rho) = (0, 1, 2)$ に取ると、

$$\partial_0 F^{12} + \partial_1 F^{20} + \partial_2 F^{01} = -\frac{\partial B_3}{\partial x^0} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial x^2} \tag{10.28}$$

$$= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{E}})_z\right) = 0 \tag{10.29}$$

となり、これはファラデーの法則になっています。

磁荷が存在しないという仮定のもとでのマクスウェルの方程式のうち、磁場に関するガウスの法則と、電磁誘導に関するファラデーの法則については、電磁場テンソルの反対称性からくる数学的な性質に帰着してしまいます。そして、物質との作用を表す方程式は、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{10.30}$$

の一つにまとめられてしまいます。

この式は、ローレンツ・ゲージのもとでは、ポテンシャルと物質項の方程式と一致します。すなわち、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \tag{10.31}$$

$$= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_{mu} \partial^\nu A^\mu \tag{10.32}$$

$$= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_{mu} A^\mu) \tag{10.33}$$

$$= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu \tag{10.34}$$

となります。(途中でローレンツ・ゲージの条件を用いています)

10.3 ローレンツ力の共変形式

次にローレンツ力の式を共変形式で表現しましょう。これは

$$\overrightarrow{\mathrm{f}} = q\overrightarrow{\mathrm{E}} + \overrightarrow{\mathrm{j}} \times \overrightarrow{\mathrm{B}} \tag{10.35}$$

ですが、今までの計算を振り返ると、これは j^μ と $F^{\mu\nu}$ の積になっていると考えられます。

そこで、$f^\mu = F^{\mu\nu} j_\nu$ とおいてみます。これがどのような式を表すか計算してみましょう。

時間成分については、

$$f^0 = F^{00} j_0 + F^{01} j_1 + F^{02} j_2 + F^{03} j_3 \tag{10.36}$$

$$= F^{00} j^0 - F^{01} j^1 - F^{02} j^2 - F^{03} j^3 \tag{10.37}$$

$$= 0 + j_x \frac{E_x}{c} + j_y \frac{E_y}{c} + j_z \frac{E_z}{c} \tag{10.38}$$

$$= \frac{\overrightarrow{\mathrm{j}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{E}}}{c} \tag{10.39}$$

となって、ジュール熱(電場のする仕事)の項を再現しています。

一方、空間成分も例えば $\nu = 1$ について計算すれば、

$$f^1 = F^{10} j_0 + F^{11} j_1 + F^{12} j_2 + F^{13} j_3 \tag{10.40}$$

$$= F^{10} j^0 - F^{11} j^1 - F^{12} j^2 - F^{13} j^3 \tag{10.41}$$

$$= \rho c \frac{E_x}{c} + 0 + j_y B_z - j_z B_y \tag{10.42}$$

$$= \rho E_x + (\overrightarrow{\mathrm{j}} \times \overrightarrow{\mathrm{B}})_x \tag{10.43}$$

となり、ローレンツ力を再現していることが分かります。このように、相互作用を表す項は、2 つの構成要素の積(この場合は電流密度と電磁場)の形を取るのが一般的です。

10.4 電磁場の解析力学

以上を踏まえて、電磁場を解析力学の枠組みの中に組み込むことを試みましょう。

ラグランジュ形式にローレンツ力の項を組み入れることを考えますが、ラグランジュ関数はスカラーでしたから、前節の式をそのまま用いることはできません。そこで、電磁場の代わりに、電流 j^μ とポテンシャル A^μ の積からスカラーを作り、

$$S_{\mathrm{int}} = \int_A^B j^\mu A_\mu d\tau \tag{10.44}$$

とおきます。これを相互作用項と呼ぶことにしましょう。

ここで電流について、

$$j^\mu = qu^\mu = q\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{10.45}$$

なので、相互作用項は、

$$S_{\mathrm{int}} = \int_A^B qA_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau \tag{10.46}$$

となります。これを変分してみましょう。

$$\delta S_{\mathrm{int}} = q\int_A^B \delta A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau + q\int_A^B A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} d\tau \tag{10.47}$$

$$= q\int_A^B \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau + q\int_A^B A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} d\tau \tag{10.48}$$

この第 2 項に部分積分を使って変形すると、

$$q\int_A^B A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \quad = [qA_\mu \delta x^\mu]_A^B - q\int_A^B \frac{dA_\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau \tag{10.49}$$

となりますが、これの第 1 項は積分の両端で $\delta x^\mu = 0$ なので消えます。また、合成関数の導関数の公式を用いて、

$$\frac{dA_\mu}{d\tau} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{10.50}$$

ですから、これを用いれば、

$$S_{\mathrm{int}} = q\int_A^B \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta x^\nu d\tau - q\int_A^B \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau \tag{10.51}$$

となります。ここで第 2 項の添字を入れ替えて δx^ν に統一すると、

$$S_{\mathrm{int}} = q\int_A^B \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta x^\nu d\tau \tag{10.52}$$

$$= \int_A^B F_{\nu\mu} j^\mu \delta x^\nu d\tau \tag{10.53}$$

となります。ここで、自由粒子のラグランジアンと組み合わせた全作用関数

$$S = S_0 + S_{int} = \int (-mc^2 + j_\mu A^\mu) d\tau \tag{10.54}$$

について変分を取れば、以前の結果を用いて、運動方程式として、

$$-mc^2 \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + F_{\nu\mu} j^\mu = 0 \tag{10.55}$$

が得られます。これに $\eta^{\mu\nu}$ をかけて添字を上げ下げして整理すると、

$$mc^2 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^{\mu\nu} j_\nu = 0 \tag{10.56}$$

となり、前節のローレンツ力の共変形式が得られました。

10.5　電磁場のラグランジュ関数

残るは電磁場のマクスウェル方程式そのものを解析力学に載せることです。しかし、これは今までの延長線上にはなしえません。これまでは 1 粒子に着目し、そこにはたらく力としてローレンツ力を導入しました。ところが「場」は空間全体に遍く存在するものです。その性質を記述する方程式も時空上の各点で成立するものです。したがって、何か 1 つの経路上の積分という考え方ではこれを扱うことはできないのです。

ニュートン力学の基本法則の一つに「作用・反作用の法則」がありました。たとえばある距離にある 2 つの電荷の間にはたらくクーロン力は互いに逆向きで大きさが等しい、ということがいえます。しかし、相対論では離れた二点間における力の関係を云々することはできません。あくまで物理法則は局所的な形式に書かれなければならないのです。そのためには電荷同士を問題にするのではなく、電荷と場の間での作用・反作用を論じる必要があるでしょう。読者の方々の多くは電磁場にも運動量やエネルギーが存在することをご存知だと思います。運動量があれば、そこに作用・反作用を考えることができます。詳しい議論は次章で行いますが、その議論の土台としても、場の方程式も含めて一つの解析力学の俎上に載せることが必要なのです。

空間全体にわたる場の量からすべての情報を含むものですから、空間全体にわたっての積分するとラグランジアンになるような量 $\mathcal{L}$ を考えて、

$$L=\int \mathcal{L} d^3x \tag{10.57}$$

となるようにします。これは体積で積分するとラグランジアンになる、という意味で**ラグランジアン密度**といいます。このとき、作用は

$$S=\iint \mathcal{L} d^3x dt \tag{10.58}$$

となりますが、特殊相対論においては積分素 d^3xdt のヤコビアンは 1 ですから、作用がローレンツ変換について不変になるためには、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ もスカラーである必要があります。

場の量から作られるもっとも単純なスカラー量としては、電磁場テンソルの内積 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ でしょう。これは成分を計算すると

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=2(B^2-E^2) \tag{10.59}$$

です。そこで、係数を未知として場のラグランジアン密度を、

$$\mathcal{L}_{\text{field}}=aF^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{10.60}$$

とします。係数はあとで決めることにしましょう。

一方で、これまでの自由粒子や相互作用のラグランジアンもラグランジアン密度にしておきましょう。これにはデルタ関数を利用します。

$$\mathcal{L}_{\text{free}}=-mc^2\delta^{(3)}(\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}_0(t)) \tag{10.61}$$

ここで、$\vec{\mathrm{r}}_0$ は時刻 t での粒子の位置を与える関数です。相互作用項も、電流密度を

$$j^\mu=q\delta^{(3)}(\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}_0(t))\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{10.62}$$

とおいて、

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=j^\mu A_\mu=q\delta^{(3)}(\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}_0(t))\frac{dx^\mu}{d\tau}A_\mu \tag{10.63}$$

と書き直しておきましょう。

これから求めたいことは、場やポテンシャルを与える方程式を求めることです。したがって、A^μ や $F^{\mu\nu}$ で変分をとることになるので、自由粒子のラグランジアンは関与しません。

そこで、

$$S=S_{\text{int}}+S_{\text{field}} \tag{10.64}$$

とおいて変分を取ります。ここでは場の量とポテンシャルの間は独立と仮定して変分します。そうすると、

$$\delta S=a\iint\left(\delta F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\right)d^3xdt \tag{10.65}$$

となります。場の量の変分の方を変形していきましょう。

$$\delta F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}\left\{\delta(\partial_\mu A_\nu) - \delta(\partial_\nu A_\mu)\right\}$$

ですが、$F^{\mu\nu}$ の反対称性により、後半部分は、

$$F^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu A_\mu) = F^{\nu\mu}\delta(\partial_\mu A_\nu) = -F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu)$$

となるので、結局は、

$$F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu) \tag{10.66}$$

となります。したがって、場の量の変分については、

$$\delta F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = 4F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu) = -4F^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu A_\mu) \tag{10.67}$$

となります。最後のところでは F の反対称性を用いて、次の A_μ と添字を揃えました。

第 2 項とあわせるために、部分積分を用いて変分に微分がついているのをはずしましょう。

$$\text{第 1 項} = -4a\iint F^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu A_\mu)d^3xdt \tag{10.68}$$

$$= -4a\iint F^{\mu\nu}\partial_\nu(\delta A_\mu)d^3xdt \tag{10.69}$$

$$= -4a\left\{\iint_S F^{\mu\nu}\delta A^\mu dS_\nu - \iint \partial_\nu F^{\mu\nu}d^3xdt\right\} \tag{10.70}$$

最後の式で、第 1 項の S とは時空を囲む領域の”表面 ” で、空間的な境界は無限に遠い点にとるので場の量は 0 になり、時間的な境界上では変分を 0 にとります。よって、どちらにしても、この表面積分は 0 になります。

以上により、

$$\delta S = \int(4a\partial_\nu F^{\mu\nu} + j^{nu})\delta A_{/mu}d^3xdt = 0 \tag{10.71}$$

よって、

$$4a\partial_\nu F^{\mu\nu} + j^{nu} = 0 \tag{10.72}$$

これがマクスウェル方程式は、$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$ だったので、ここから係数が決まり、

$$\mathcal{L}_{\text{field}} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{10.73}$$

とすればよいことが分かりました。

まとめ

これで、電磁場を含むラグランジアンが決まりました。

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = -mc^2\delta^{(3)}(\overrightarrow{\mathrm{r}} - \overrightarrow{\mathrm{r}}_0(t)) \tag{10.74}$$

$$\mathcal{L}_{\text{field}} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{10.75}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = j^\mu A_\mu = q\delta^{(3)}(\overrightarrow{\mathrm{r}} - \overrightarrow{\mathrm{r}}_0(t))\frac{dx^\mu}{d\tau}A_\mu \tag{10.76}$$

として、全ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{field}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \tag{10.77}$$

であり、作用関数は、

$$S = \iint \mathcal{L}d^3xdt \tag{10.78}$$

となります。