第 11 章

電磁場のエネルギーと運動量

11.1　ミンコフスキー時空における積分と積分定理

まず、数学的準備として、ミンコフスキー時空における積分について考えます。

■線積分　時空内の曲線に沿って行われる積分は、普通の線積分になります。この場合、線素は dx^μ です。

■面積分　2 次元での積分は、積分の面を各座標平面に射影して考えます。ただし、この平面は空間中の平面だけではなく、$dx^0 dx^1$ のように時間座標も含む場合もあります。$d\vec{r} = (dx^\mu)$ と $d\vec{r'} = (dx'^\mu)$ によって張られる平行四辺形を $x^\mu x^\nu$ 平面に射影した部分の面積は、$dx^\mu dx'^\nu - dx^\nu dx'^\mu$ になります。これは、通常の面積と同じ理屈です。よって、面積素は反対称テンソル

$$df^{\mu\nu} = dx^\mu dx'^\nu - dx^\nu dx'^\mu \tag{11.1}$$

によって表されます。3 次元では、これに対応する「面積素ベクトル」が存在しましたが、4 次元ではこれはベクトルにはならず、双対なテンソル

$$df^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} df_{\rho\lambda} \tag{11.2}$$

を使うこともあります。

■体積分　次に 3 次元での積分は、通常の体積と同様、3 つのベクトルから作られる行列式によって、

$$dS^{\mu\nu\rho} = \begin{vmatrix} dx^\mu & dx'^\mu & dx''^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu & dx''^\nu \\ dx^\rho & dx'^\rho & dx''^\rho \end{vmatrix} \tag{11.3}$$

これに対しては、双対なベクトルが存在し、

$$dS^\mu = -\frac{1}{6}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} S_{\nu\rho\lambda} \tag{11.4}$$

を使うほうが便利なことが多いでしょう。

■4 次元での積分　時空内での積分は、$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ です。これを $d\omega$ や d^4x と書くこともあります。

■スカラー密度　いま、あるスカラー関数 $A(x)$ があったとすると、これはスカラーの定義より他の慣性系でも、

$$A(x) = A'(x')$$

が成り立ちます。これを時空内で積分した結果を考えましょう。

$$\int A(x) d^4x$$

これは、スカラーではありません。ヤコビアンの計算により

$$\int A(x) d^4x = \int A'(x') \frac{1}{\gamma} d^4x'$$

ですから、このままでは $\int A(x)d^4x = \int A'(x')d^4x'$ にはなりません。そこで、被積分関数をかえて、

$$\int A(x)\gamma d^4x \tag{11.5}$$

という量を考えると、これは

$$\int A'(x')\gamma' d^4x' = \int A(x)\gamma' \frac{\gamma}{\gamma'} d^4x = \int A(x)\gamma d^4x \tag{11.6}$$

となって、不変量となります。そこで、積分すると不変量になる、という意味で $intA(x)\gamma$ をスカラー密度と呼びます。ローレンツ因子をつけるのは、体積がローレンツ変換によって変化するためです。

■ミンコフスキー時空における積分定理　以下では、ここで使うミンコフスキー時空における積分定理を書いておきます。

まず、ストークスの定理からです。これは、閉曲線 C 上の積分を、その C を縁とする任意の曲面上の積分と結び付けます。

$$\oint_C A_\mu dx^\mu = \frac{1}{2!}\iint_S f_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} \tag{11.7}$$

ここで、$f_{\mu\nu}$ は、

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{11.8}$$

で定義されます。

次にガウスの法則ですが、これは 2 種類あります。まず 3 次元におけるガウスの法則は、ある閉曲面 S 上の積分を、それを境界とする 3 次元領域 V*1 についての積分に変換します。これは、

$$\frac{1}{2!}\iint_S A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{3!}\iiint_V F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} \tag{11.9}$$

となります。ここで、右辺の $F_{\lambda\mu\nu}$ は

$$F_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu} \tag{11.10}$$

で定義される完全反対称のテンソルです。

次に 4 次元におけるガウスの定理は、3 次元の閉超曲面*2 V における積分を、その内部の 4 次元領域 ω における積分に変換するものです。これは、

$$\frac{1}{3!}\iiint T_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4!}\int\cdots\int_\omega W_{\lambda\mu\nu\rho} d\omega^{\lambda\mu\nu\rho} \tag{11.11}$$

となります。ここで、$W_{\lambda\mu\nu\rho}$ は、

$$W_{\lambda\mu\nu\rho} = \partial_\lambda T_{\mu\nu\rho} - \partial_\mu T_{\nu\rho\lambda} + \partial_\nu T_{\rho\lambda\mu} - \partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} \tag{11.12}$$

で定義される完全反対称テンソルです。

3 次元空間内のガウスの定理は、閉曲面上のベクトルを積分したものを、その内部における発散というスカラーを積分したものに変換しました。ここではテンソルとしての階数は減っています。しかし、ここに挙げた 4 次元時空におけるガウスの法則では、テンソルの階数が上がっているので違和感があるかもしれません。しかし、これは次元の違いによるものであって、微分形式という数学を使えば、これらが同じ形の定理だということが分かります。また、元のテンソルが反対称という条件を使うと、実は 3 階のテンソルのうち 0 でない成分は 4 つしかありません*3。つまり、これは四元ベクトルと同等ということになります。いま、この独立な 4 つの成

---

*1 3 次元空間内ならば、このような空間は閉曲面で囲まれる体積として一意に決まります。しかし、4 次元時空内ではひとつではありません。これは、2 次元では円の内部は一意に決まりますが、3 次元空間では円を縁とする曲面は無数に考えられることから類推できるでしょう。

*2 超曲面というのは、空間の一部ではなく、時間方向を含むこともできる 3 次元の部分空間という意味で使っています。

*3 4 つの数字のうち異なるものを 3 つ選ぶので、${}_4C_3 = 4$ で、4 通りの独立した成分があることになります。

分を $T^0 = T_{123}, T^1 = -T_{230}, T^2 = T_{301}, T^3 = -T_{012}$ とします。これは、反対称のテンソル $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ によって、$T^\mu = \frac{1}{4!}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}T_{\mu\nu\rho}$ で定義されています。また、$W_{\lambda\mu\nu\rho}$ の方は、4 階の反対称テンソルですから独立な成分はたった一つであり、スカラーと同等ということになります。よって、これを用いてこの 1 つの成分として W_{0123} を計算すれば、

$$
\begin{aligned}
W_{0123} &= \partial_0 T_{123} - \partial_1 T_{230} + \partial_2 T_{301} - \partial_3 T_{012} && (11.13)\\
&= \partial_0 T^0 + \partial_1 T^1 + \partial_2 T^2 + \partial_3 T^3 && (11.14)\\
&= \partial_\mu T^\mu && (11.15)
\end{aligned}
$$

であり、これは四元ベクトルの発散にほかなりません。こうしてみれば、一見すると見慣れない形ですが、中身はガウスの法則そのものであることが分かります。

11.2 ミンコフスキー時空における保存則

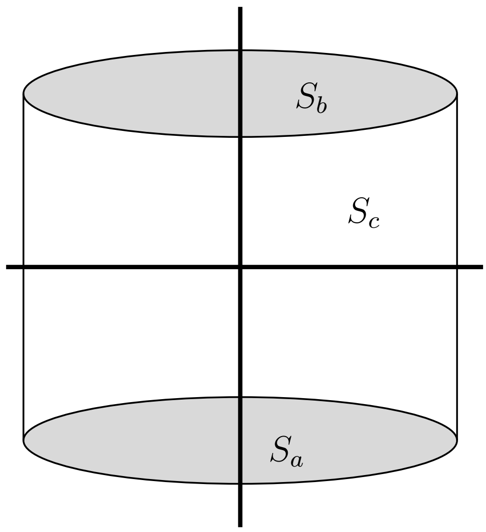
いま、2 階のテンソル $T^{\mu\nu}$ が、ある領域外では 0 になっているとき「孤立系」とします。また、$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ を満たすとします。このとき、このテンソルの 0 成分で作ったベクトル $T^{\mu 0}$ の積分が、時間によらず一定、つまり保存することを確認するのがこの節の目的です。

時空中の閉じた部分 σ についてのガウスの定理を使います。

$$0 = \int_\sigma \partial_\nu T^{\mu\nu} d^4x = \int_S T^{\mu\nu} dS_\nu \tag{11.16}$$

ここで S は、考えている時空領域 σ の境界となる三次元領域です。

そこで、次のような時空領域を考えます。$x^0 = a$ と $x^0 = b$ の空間[*4]で挟まれた領域です。両端の空間を S_a と S_b とします。また、側面は両端となる空間の境界面を含む、時間方向へ延びる「円筒」型側面とします。この側面を S_c とします（右図参照)。



また、S_a の法線ベクトルは $-dS_0$ であり、S_b では dS_0 になります。ここで $dS_0 = (\mp d^3x, 0, 0, 0)$ です。すると、右辺の積分は、

$$\int_S T^{\mu\nu} dS_\nu = \int_{S_a} T^{\mu\nu} dS_\nu + \int_{S_b} T^{\mu\nu} dS_\nu + \int_{S_c} T^{\mu\nu} dS_\nu \tag{11.17}$$

になりますが、孤立系の条件により、領域を十分大きく取れば第 3 項の積分は 0 になります。

したがって残りの積分は、

$$\int_{S_a} T^{\mu 0} d^3x = \int_{S_b} T^{\mu 0} d^3x \tag{11.18}$$

となることがいえます。

したがって、ベクトル

$$P^\mu = k \int T^{\mu 0} d^3x \tag{11.19}$$

は、時刻によらない量、つまり保存量になることが分かりました。ここで k は何かの定数ですが、$T^{\mu\nu}$ が運動量・エネルギー密度のとき、P^μ が四元運動量になるように調整すると、通常 $k = \frac{1}{c}$ とします。

相対論における四元運動量ベクトルは、このように上のような条件を満たす 2 階テンソルから作ることができれば、それが保存量になることがいえます。このようなテンソルは「エネルギー・運動量テンソル」と呼ばれています。

ところで、この定義から、本当にベクトルになるのでしょうか？被積分関数はベクトルですが、それを時刻一定の空間で積分しています。この「時刻一定」というのは、ローレンツ変換によって変わってしまいます。そう考えると、

[*4] これは普通の時刻一定な 3 次元空間です。

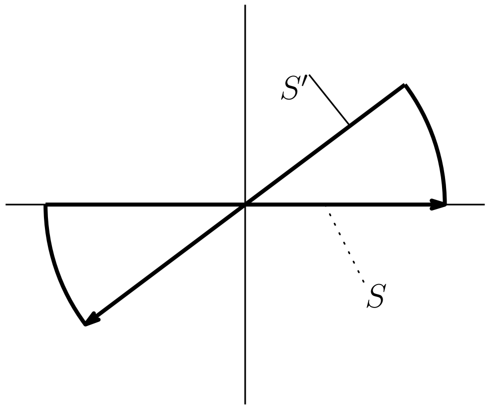
異なる空間で積分したものがローレンツ変換で結び付けられるのか、確かめてみる必要があるでしょう。実際には、保存則が成り立つ条件である「孤立系」と「発散が 0」ということから、これがローレンツ変換によってベクトルとして変換することが分かります。

まず、より一般的な四次元時空内のある部分 V を取り囲む 3 次元の超平面 S での積分を考えます。これにガウスの法則を適用すれば、

$$\int_S T^{\mu\nu} dS_\nu = \int_V \partial_\nu T^{\mu\nu} d\omega = 0 \tag{11.20}$$

が成り立ちます。

そこである慣性系 K とそれとローレンツ変換した慣性系 K' で考えます。K 系において、ある時刻 $t = t_0$ の空間を S、K' 系での同時刻 $t' = t_0$ となるべき空間 S'、そして、それを無限遠でつなぐ部分 T_1, T_2 で囲まれた時空領域を考えます（右図参照)。



無限遠では場は 0 になっているという条件でしたので、上の積分領域は S と S' による部分のみが残り、

$$\int_S T^{\mu\nu} dS_\nu - \int_{S'} T^{\mu\nu} dS'_\nu = 0 \tag{11.21}$$

となります。S' の方は、法線が逆向きになるので（あるいは領域を一周するならば、逆走することになる、と考えてください）負号がついています。また、いまはあくまでローレンツ変換前の空間で考えているので、積分の中は $T^{\mu\nu}$ です。これをローレンツ変換したあとの量と結びつけると、

$$\int_{S'} T'^{\mu\nu} dS'_\nu = \int \Lambda^\mu{}_\lambda T^{\lambda\nu} dS'_\nu \tag{11.22}$$

となります。また、K 系では $dS_\nu = (d^3x, 0, 0, 0)$、K' 系では $dS'_\nu = (d^3x', 0, 0, 0)$ ですから、

$$\int_{S'} T'^{\mu 0} d^3x' = \int_{S'} T'^{\mu\nu} dS'_\nu \tag{11.23}$$

$$= \int_{S'} \Lambda^\mu{}_\lambda T^{\lambda\nu} dS'_\nu \tag{11.24}$$

$$= \Lambda^\mu{}_\lambda \int_{S'} T^{\lambda\nu} dS'_\nu \tag{11.25}$$

$$= \Lambda^\mu{}_\lambda \int_S T^{\lambda\nu} dS_\nu \tag{11.26}$$

$$= \Lambda^\mu{}_\lambda \int_S T^{\mu 0} d^3x \tag{11.27}$$

となります。よって、

$$P'^\mu = \Lambda^\mu{}_\lambda P^\lambda \tag{11.28}$$

がいえましたので、これが四元ベクトルとして変換することが確認できました。

さて、以下では物質、電磁場、それぞれのエネルギー・運動量テンソルがどのようなものか見ていきます。

11.3　物質のエネルギー・運動量テンソル

まず、物質のエネルギー・運動量テンソルから作りましょう。

まず、空間積分によって運動量ベクトルを再現するようなものになっていなければなりません。$P^\mu = mu^\mu$ でしたので、これを再現するような第 0 行成分を作ってみます。

このテンソルは、積分してベクトルになるようなものなので「密度」の性質をもっています。そこで、質量密度の関数を作ります。これは時刻 $t = a$ での粒子の位置が $X(a)$ であるとすると、質量密度を

$$\mu = m\delta^{(3)}(x - X(t)) \tag{11.29}$$

と定義すれば、質量は、

$$m = \int \mu d^3x \tag{11.30}$$

となります。ここで、デルタ関数の変換について考えてみると、

$$\int \delta^{(3)}(x-z)d^3x = \int \delta^{(3)}(x'-z')d^3x' \tag{11.31}$$

となるべきなので、$d^3x = \gamma d^3x'$ を踏まえると、4 次元デルタ関数のローレンツ変換は、

$$\delta^{(4)}(x'-z') = \frac{1}{\gamma}\delta^{(4)}(x-z) \tag{11.32}$$

となるべきだということが分かります。したがって、

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}\delta(x-z) = \frac{\partial\tau}{\partial t'^2}\delta(x'-z') \tag{11.33}$$

がスカラーになります。

では、まず T^{00} から考えましょう。これはエネルギー密度を与えるはずです。

$$mc\gamma = \frac{1}{c}\int T^{00}d^3x \tag{11.34}$$

より、

$$T^{00} = \mu c^2\gamma = \mu(c\gamma)^2\frac{1}{\gamma} = \mu u^0u^0\frac{\partial\tau}{\partial t} \tag{11.35}$$

となることが分かります。ここでも上に述べたように $\mu\frac{\partial\tau}{\partial t}$ がスカラーになることに注意してください。

他の成分は、

$$T^{i0} = \mu cu^i = \mu(c\gamma)u^i\frac{1}{\gamma} = \mu u^0u^i\frac{\partial\tau}{\partial t} \tag{11.36}$$

となります。これで第 0 行の成分が決まりました。

次に T^{0i} について考えます。これは保存則を満たすように作ります。保存則を満たすためには、

$$\partial_\nu T^{0\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}T^{00} - \partial_i T^{0i} = 0 \tag{11.37}$$

が成り立っている必要があります。これを体積分すると、

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}d^3x - \int \partial_i T^{0i}d^3x = 0 \tag{11.38}$$

になりますが、第 1 項を定義からエネルギー（を光速度で割ったもの）に置き換え、第 2 項にガウスの法則を用いれば、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E}{c}\right) + \int_{\partial V} T^{0i}dS = 0 \tag{11.39}$$

のように変形できます。よって、T^{0i} は、ある領域に流れ込むエネルギーの流れを表していると解釈することができます。いまは粒子について考えているので、この粒子の動きに付随してエネルギーが流れている、つまりエネルギーの流れは、「粒子のエネルギー × 速度」の形で表されることになります。したがって、

$$T^{0i} = \mu u^0u^0\frac{\partial\tau}{\partial t} \times v^i = \mu u^0u^i\frac{\partial\tau}{\partial t} \tag{11.40}$$

となります。

残りの部分も同様で、T^{ij} は運動量の流れ、流体力学では応力テンソルと呼ばれるものになります。したがって、

$$T^{ij} = T^{i0} \times v^j = \mu u^iu^j\frac{\partial\tau}{\partial t} \tag{11.41}$$

となることが分かります。

これらをまとめると、エネルギー・運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu} = \mu u^\mu u^\nu\frac{\partial\tau}{\partial t} \tag{11.42}$$

エネルギー・運動量テンソルは、ラグランジアンから「ネーターの定理」を用いて導くこともできますが、そういう話はまた別の機会にしたいと思います。

11.4 電磁場のエネルギー・運動量テンソル

古典電磁気学によると、電磁場にはエネルギーと運動量があるということになっています。エネルギー密度は、

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) \tag{11.43}$$

です。これに対するエネルギーの流れは、ポインティングベクトルと呼ばれるもので、

$$\overrightarrow{\mathrm{S}} = \frac{1}{\mu_0}\left[\overrightarrow{\mathrm{E}} \times \overrightarrow{\mathrm{B}}\right] \tag{11.44}$$

で定義されます。

また、運動量の密度は、

$$\overrightarrow{\mathrm{g}} = \frac{1}{c^2}\overrightarrow{\mathrm{S}} \tag{11.45}$$

となります。エネルギー流と運動量密度にこのような関係があるのは、電磁場の特徴です。そして、運動量の流れである応力テンソルは、電場だけを書くと、

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_0}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) & \varepsilon_0 E_x E_y & \varepsilon_0 E_x E_z \\ \varepsilon_0 E_y E_x & \frac{\varepsilon_0}{2}(E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) & \varepsilon_0 E_y E_z \\ \varepsilon_0 E_z E_x & \varepsilon_0 E_z E_y & \frac{\varepsilon_0}{2}(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) \end{pmatrix} \tag{11.46}$$

となります。これを成分と場の量との対応で書くと、

$$T^{ij} = -(\varepsilon_0 E^i E^j - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \delta^{ij}) \tag{11.47}$$

となります。磁場についても書けば、

$$T^{ij} = -\left[\varepsilon_0 E^i E^j + \frac{1}{\mu_0}B^i B^j - \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)\delta^{ij}\right] \tag{11.48}$$

となります。

$P^\mu = \frac{1}{c}\int T^{\mu 0} d^3x$ という関係を考慮すると、$P^0 = \frac{w}{c}$ も踏まえれば、

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & cg_x & cg_y & cg_z \\ \frac{1}{c}S_x & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ \frac{1}{c}S_y & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ \frac{1}{c}S_z & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \tag{11.49}$$

とできるでしょう。

これの発散を計算しておきます。

計算の細部は省略しますが、エネルギー密度の時間微分は、マクスウェルの方程式を用いて変形すると、

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathrm{S}} - \overrightarrow{\mathrm{j}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{E}} \tag{11.50}$$

となります。第 1 項はポインティングベクトルが運ぶエネルギーの流れによってもたらされるエネルギーの増減を表しています。第 2 項は、いわゆるジュール熱で、走る電荷（電流）が電場から受け取るエネルギーを表しています。つまり、電磁場のエネルギーの変化は、場の中だけでは完結せず、物質とのやり取りも含めて考える必要があるということです。これは、基本方程式であるマクスウェル方程式に電荷や電流といった物質に起因する項があるためです。

一方、電磁場の運動量について時間変化を計算すると、

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{g}}}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla} \cdot T - (\rho\overrightarrow{\mathrm{E}} + \overrightarrow{\mathrm{j}} \times \overrightarrow{\mathrm{B}}) \tag{11.51}$$

となります。この第 1 項は応力からの場の運動量変化です。そして第 2 項はローレンツ力であり、場が物質に及ぼす力になっています。

以上の結果で、右辺第１項を左辺に移項してしまうと、

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} j_\nu \tag{11.52}$$

となります。これは、場のエネルギー・運動量が、物質との相互作用を行うことを反映しています。

ところで、この $T^{\mu\nu}$ が本当にテンソルなのか、という問題があります。それぞれの量をローレンツ変換して確かめることもできますが、これはかなり大変な計算になります。すでに分かっているテンソルから作れれば早いのですが、実は、

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\nu} - \frac{1}{4}F^\lambda{}_\kappa F^\kappa{}_\lambda \eta^{\mu\nu}\right) \tag{11.53}$$

と書き表すことができます。したがって、自動的にテンソルであることが保障されます。

11.5 作用・反作用の近接作用論的解釈

では、物質のエネルギー・運動量テンソルの変化についても考えていきましょう。

$$\partial_\nu\left(\mu u^\mu u^\nu \frac{d\tau}{dt}\right) = \partial_\nu\left(\mu u^\nu \frac{d\tau}{dt}\right)u^\mu + \mu u^\nu \frac{d\tau}{dt}\partial_\nu\left(u^\mu\right) \tag{11.54}$$

とします。第１項の括弧の微分は連続の方程式より０になります。第２項について微分を明示的に書いて行くと、

$$u^\nu \partial_\nu (u^\mu) = \frac{dx^\nu}{d\tau}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2} \tag{11.55}$$

のように変形できます（合成関数の微分の法則です)。よって、

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \mu\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}\frac{d\tau}{dt} \tag{11.56}$$

と変形できました。

もし、自由粒子を考えているならば、右辺は運動方程式により０になりますので、そのまま単独でエネルギー・運動量は保存することになります。

一方、電磁場が存在する場合、右辺に運動方程式を適用することによって、

$$\mu\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}\frac{d\tau}{dt} = m\delta^{(3)}(\overrightarrow{\mathrm{r}})\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}\frac{d\tau}{dt} \tag{11.57}$$

としておいて、

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}\times\delta^{(3)}(\overrightarrow{\mathrm{r}})\frac{d\tau}{dt} &= F^\mu \delta^{(3)}(\overrightarrow{\mathrm{r}})\frac{d\tau}{dt} && (11.58)\\ &= \gamma q F^{\mu\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\delta^{(3)}(\overrightarrow{\mathrm{r}})\frac{d\tau}{dt} && (11.59)\\ &= q\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\delta^{(3)}(\overrightarrow{\mathrm{r}})F^{\mu\nu} && (11.60)\\ &= F^{\mu\nu} j_\nu && (11.61)\end{aligned}$$

となります。まとめると、

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} j_\nu \tag{11.62}$$

と書くことができます。したがって、前節の結果を踏まえれば、物質のエネルギー・運動量テンソルを $T^{\mu\nu}_{(m)}$、電磁場のエネルギー・運動量テンソルを $T^{\mu\nu}_{(EM)}$ と書いて区別すると、

$$\partial_\nu\left(T^{\mu\nu}_{(m)} + T^{\mu\nu}_{(EM)}\right) = 0 \tag{11.63}$$

が成り立ち、物質と電磁場を併せた全体のエネルギー・運動量が保存することになります。

この式は、物質が得るエネルギー・運動量と、電磁場の得るエネルギー・運動量とが、各点においてつり合っていることを意味しています。古典的な描像では離れたところにある電荷や電流の間に働く力の間に作用・反作用の法則

が成り立つと考えていました。しかし、場の理論で考えれば各点で局所的に作用・反作用の法則が成り立っているということになります。これはとくに、ローレンツ力や運動のある場合の相互作用を考える上で大きな意味をもってきます。

以上が、相対性理論と場の理論による、近接作用論の立場からの作用・反作用の法則の解釈になります。

まとめ

今回のまとめです。

積分によって四元運動量ベクトルを作るテンソル $T^{\mu\nu}$ をエネルギー・運動量テンソルといい、

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int T^{\mu\nu} dS_\nu \tag{11.64}$$

で、四元運動量ベクトルと結び付けられます。このテンソルが孤立系（有限の範囲内でのみ 0 でない）かつ発散が $0(\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0)$ のとき、四元運動量は保存します。

物質のエネルギー・運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu}_{(m)} = \mu u^\mu u^\nu \frac{\partial \tau}{\partial t} \tag{11.65}$$

で定義されます。

また、電磁場のエネルギー・運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu}_{EM} = \begin{pmatrix} w & cg_x & cg_y & cg_z \\ \frac{1}{c}S_x & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ \frac{1}{c}S_y & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ \frac{1}{c}S_z & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \tag{11.66}$$

あるいは、

$$T^{\mu\nu}_{EM} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\nu} - \frac{1}{4}F^\lambda{}_\kappa F^\kappa{}_\lambda \eta^{\mu\nu}\right) \tag{11.67}$$

で場の量から作られます。

また、電磁場が存在するときのそれぞれの発散は、物質が

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}_m = F^{\mu\nu} j_\nu \tag{11.68}$$

となり、電磁場については、

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}_{EM} = -F^{\mu\nu} j_\nu \tag{11.69}$$

になります。そして、

$$\partial_\nu \left(T^{\mu\nu}_{(m)} + T^{\mu\nu}_{(EM)}\right) = 0 \tag{11.70}$$

が成り立ち、各点においてそれぞれの発散がつり合うことになります。これは、局所的に物質のエネルギー・運動量の増減と、電磁場のエネルギー・運動量の増減がつり合うことになります。相対性理論では、何か遠く離れたものの間に同時に関係があるということは許されません。それが「場」というものの導入になったわけですが、作用・反作用の法則も、このように局所的な形に書き直すことができました。