第 12 章

相対論的電磁気学の帰結と限界

この章の前半では、電磁気学に相対論的な観点を加えて、磁場と変位電流について考えてみます。それによって相対論によって電磁気学がより一貫したものとして理解できることが分かるでしょう。後半では、物質の構成要素のうちのもっとも小さなものである電子について、「点電荷」の作る電磁場を調べることによって考えていきます。相対論によって「すべてのものは光速を超えて伝わることができない」という制約が課されるので、遅延して空間を伝わっていく電磁場を考えます。そこから導き出される「制動放射」は電子による電磁波の放出を説明しますが、それは同時に古典物理学の限界を示すものでもありました。さらに電子を古典電磁気学で考えることでその限界をみたいと思います。

12.1 相対論と磁場

磁場というものは、非常に身近な現象ですが理解しにくいものでもあります。高校の物理でも最初に「磁荷」が導入されますが、その後、磁荷は説明から消えてしまい電磁誘導が中心となっていきます。この節の目的は、静止系における静電場がローレンツ変換によって磁場として観測されるということを示すことにあります。これによって、磁場の現象が相対論的な共変性によるものであることを明確にします。

基準となる慣性系 K において、原点に静止する電荷 q が作るポテンシャルは、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \tag{12.1}$$

となります。これを z 軸方向に速度 v で運動する慣性系 K' で観測するという状況を考えます。系 K における 4 元ポテンシャルは、

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, 0, 0, 0\right) \tag{12.2}$$

です。これをローレンツ変換すると、

$$A'^\mu = \left(\frac{\gamma\phi}{c}, 0, 0, \frac{\gamma\beta\phi}{c}\right) \tag{12.3}$$

となります。よって、ベクトル・ポテンシャルを抜き出すと、$A'_x = A'_y = 0$ で、0 でないのは、

$$A'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{qv}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \tag{12.4}$$

のみです。ここから磁場を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{r^3} \tag{12.5}$$

などになるので、

$$\vec{B'} = \vec{\nabla} \times \vec{A'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(-\frac{y}{r^3}, +\frac{x}{r^3}, 0\right) \tag{12.6}$$

となります。ここで、$v << c$ として、$I = qv$ とおけば、円筒座標系 (r, θ, z) の極方向への単位ベクトル

$$\vec{e_\theta} = \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0\right) \tag{12.7}$$

を用いると、

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\vec{e_\theta} \tag{12.8}$$

となりビオ＝サバールの法則を再現します。

このように、磁場は、電場をローレンツ変換したものとして解釈することができます。

では、電場だけで電磁気の現象をすべて説明できるでしょうか？たしかに、磁荷は今のところ発見されておらず、磁場を電場が姿を変えたものだとするならば、磁場自体不要なのではないか、という考え方もあるでしょう。

しかし、コイルのような円電流は 1 つの慣性系で静電場に帰着することができません。また、永久磁石による磁場はスピンという電子の性質に起因します。これは、相対論と量子力学にまたがる話ですが、電場に還元することができないものです。磁場の現象は単に電荷の運動に帰着できない部分も含んでいます。スピンについては、後の章でもう少し詳しく検討したいと思います。

12.2 「変位電流」の正体

この節では、電磁気学においてマクスウェルが最後に「発見」した「変位電流」について、それが結局なにを表現したものなのかということについて、相対論の観点から論じたいと思います。

アンペールの法則において、変位電流の項はマクスウェルが「電荷保存則」と矛盾がないように理論的に付け加えた項であり、この項の発見がマクスウェル方程式から電磁波の方程式を導くための決定的な最後の一歩となったと言われています。

具体的には、アンペールの法則、

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{12.9}$$

の両辺の発散をとると、左辺はベクトル解析の公式により（回転の発散は常に 0 となる）0 となるので、

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

を与えてしまい、電流の発散が常に 0 という、電荷保存則と矛盾した結果となってしまうわけです。ここで、電荷保存則とは、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{12.10}$$

のことを言うのでした。そこで、マクスウェルはアンペールの法則を変更し、

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \tag{12.11}$$

としました。

マクスウェルは、当初電磁場の媒質としてのエーテルを実体的なものとしてとらえており、電場の存在に対してエーテルの電気的分極が起こり、それが真空中でも「電気変位」$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ を与えると考えていました[*1]。マクスウェルが付け加えた項は、透磁率 μ_0 を除くとちょうど電流の次元をもっており、

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

と書けることから、物質の分極の変化が電流を伴うのと同様に、真空中であっても電気変位（エーテルの分極）の変化が実体的な電流としての効果を持つと考え、この項に「変位電流」の名前を与えました。

しかし、現代ではこのようなエーテルの概念は否定されています。では、この「変位電流」の項はどのように解釈可能なのでしょうか？

第 7 章でのみたように、相対性理論を踏まえると、電場・磁場は「電磁場テンソル」$F^{\mu\nu}$ というテンソルにまとめられました。それを用いてクーロンの法則とアンペールの法則を書いたものは次のような形になるのでした。

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\nu \tag{12.12}$$

[*1] これは現在では「電束密度」と呼ばれることが多いです。

これは、電磁場テンソルの 4 元的発散が、電荷・電流密度より与えられることを意味しています。
変位電流もこの式に含まれます。たとえば、$\nu = 1$ のとき、

$$\partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} = \mu_0 J_1 \tag{12.13}$$

これを、なじみの形に直すと、左辺は、

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + 0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \tag{12.14}$$

となり、アンペール・マクスウェルの法則を再現します。

ここに現れた第 1 項、変位電流に相当する項は、共変形の方程式から自然に出てくる項であり、いわば方程式が共変性を保つために必要な項のひとつであると考えられます。もしこれが、何か独立で「電流」を表すならば、ローレンツ変換によって独立に変換する四元変位電流のようなもののベクトル部分として定義され、その結果、「変位電荷」が定義されなければならないわけですがそのようなものは存在しません。この項は「テンソルの発散」の一つの成分であり、ここだけをほかと分離して考えることは不適当です。よって、あくまで場の方程式の共変性を担保する項の一つとして認識すべきでしょう。

相対論以前のマクスウェルがこの項に正しい解釈を与ええなかったのも無理はないことに思われます。しかし、相対論を考慮した共変的な形式で理論をとらえるならば、この項の意味は以上のように明らかなことだと思われます。そういう意味では、「変位電流」という名称は変えるべきなのかもしれません。

12.3 点電荷の作る場

以下の節では、電子の性質についていくつか見ていくことにします。そのために、まずは点電荷が作る電磁場について考えましょう。

まず、ダランベール方程式

$$\Box^2 \phi(\vec{r}, t) = -f(\vec{r}, t) \tag{12.15}$$

の解の一般論から考えます。もし、定常的な場で時間に依存しない場合、これはポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -f(\vec{r}) \tag{12.16}$$

となります。これの解は「グリーン関数」と呼ばれる次のような性質をもつ関数で表すことができます。すなわち

$$\nabla^2 G(\vec{r}) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{12.17}$$

の解です。これは、

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} \tag{12.18}$$

となることが知られています。詳細について知りたい方はグリーン関数などについての本を参照してください。これによって、ポアソン方程式の解は、

$$\phi(\vec{r}) = \int dV' G(\vec{r} - \vec{r'}) f(\vec{r'}) = \frac{1}{4\pi}\int dV' \frac{f(\vec{r'})}{R} \tag{12.19}$$

となります。ただし、ここで $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$ です。この式は時間微分を含んでいないので、その時点での距離がそのまま現れている遠隔作用になっています。

時間微分を含むダランベール方程式を考えた場合、粒子の情報は光速で伝わるので、点 $\vec{r'}$ にある粒子の情報は、

$$t - t' = \frac{|\vec{r} - \vec{r'}|}{c} \tag{12.20}$$

の時間をかけて点 $\vec{r}$ まで到達します。したがって、

$$t' = t - \frac{R}{c} \tag{12.21}$$

に出た情報を使う必要があります。これを踏まえると、ダランベール方程式のグリーン関数は、

$$\Box^2 G(\vec{r},t) = -\delta(\vec{r})\delta(t) \tag{12.22}$$

を満たすものですが、これは

$$G_{\pm}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t \pm \frac{r}{c}) \tag{12.23}$$

の 2 種類があります。これはダランベール方程式が 2 階の時間微分を含むので時間の逆転について対称になっているからです。しかし、プラスの符号を持つ方は未来からの情報が現在の情報を決めることを表しており、普通は非現実的なものとして採用しません。このグリーン関数は粒子の情報が空間を伝わっていくのを表しているので「伝搬関数」と呼ばれています。これを用いると、

$$\phi(\vec{r},t) = \int dt' dV' \frac{f(\vec{r'},t')\delta(t-t'-\frac{R}{c})}{4\pi R} \tag{12.24}$$

となります。ここで時間での積分を実行して現れる分子の部分を、ローレンツに従って、

$$[f] = f(\vec{r'}, t - \frac{R}{c}) \tag{12.25}$$

と書くことにすれば、

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int dV' \frac{[f]}{R} \tag{12.26}$$

というのが、ダランベール方程式を解いた解ということになります。

この記法を用いると、電荷密度 ρ と電流密度 $\vec{J}$ が与えられた時の、電磁ポテンシャルの一般的な解は、

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \frac{[\rho]}{R} \tag{12.27}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{[\vec{J}]}{R} \tag{12.28}$$

ということになります。これはローレンツ・ゲージでの解になります。ここでの [] の意味は、いま注目している点 x における場の強さを決めているのは、その点から距離 R 離れたところにある場所の $\frac{R}{c}$ 前の時刻にあった電荷・電流密度である、ということです。

これを点電荷の電荷密度・電流密度に適用しましょう。点電荷では、

$$\rho(\vec{x},t) = q\delta(\vec{x}-\vec{z}(t)) \tag{12.29}$$

$$\vec{J}(\vec{x},t) = q\vec{v}(t)\delta(\vec{x}-\vec{z}(t)) \tag{12.30}$$

となります。ここで $\vec{z}(t)$ は時刻 t での点電荷を位置、$\vec{v}(t) = \dot{\vec{z}}(t)$ は時刻 t での点電荷の速度を表します。

ここでもとの積分前の形に代入すると、

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' dt' \frac{\delta(\vec{x}'-\vec{z}(t'))\delta(t-t'-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{12.31}$$

となります。ここで空間積分を先に行います。そのときに現れるベクトルを $\vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{z}(t')$ とおいて、

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt' \frac{1}{R(t')}\delta(t-t'-\frac{R(t')}{c}) \tag{12.32}$$

と書くことができます。同様にベクトルポテンシャルも、

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi}\int dt' \frac{\vec{v}(t')}{R(t')}\delta(t-t'-\frac{R(t')}{c}) \tag{12.33}$$

となります。これを積分するわけですが、δ 関数の性質から、$t(t') = t' + \frac{R(t')}{c}$ とおいて、$t = t(t')$ となるところが残ります。このとき δ 関数の性質、

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{f'(\alpha)}\delta(x-\alpha) \tag{12.34}$$

を使う（ただし、ここで $f(\alpha)=0$) と、ここに出てくる分母を

$$K(t') = \frac{\partial}{\partial t'}\left\{t - t(t')\right\} = \frac{\partial t(t')}{\partial t'} \tag{12.35}$$

と置いて、

$$\int dt' \frac{1}{R(t)}\delta(t - t' - \frac{R(t')}{c}) = \left[\frac{1}{KR}\right] \tag{12.36}$$

と表せます。ここで [] は $t = t(t')$ のときの値を表します。ここに現れる $K(t')$ を具体的に計算すると、

$$\frac{\partial R(t')}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}|\vec{x} - \vec{z}(t')| \tag{12.37}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t'}\left\{(\vec{x} - \vec{z}(t'))\cdot(\vec{x} - \vec{z}(t'))\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{12.38}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\vec{x} - \vec{z}(t'))\cdot(\vec{x} - \vec{z}(t'))\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{-2\vec{x}\cdot\vec{v}(t') + 2\vec{z}(t')\cdot\vec{v}(t')\right\} \tag{12.39}$$

$$= -\frac{1}{R(t')}(\vec{x} - \vec{z}(t'))\cdot\vec{v}(t') \tag{12.40}$$

$$= -\frac{1}{R(t')}\vec{R}(t')\cdot\vec{v}(t') \tag{12.41}$$

ここで、$\vec{R}$ 方向の単位ベクトル $\vec{n}$ と、光速に対する速度の比のベクトル $\vec{\beta}$ を

$$\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{R} \tag{12.42}$$

$$\vec{\beta} = \frac{1}{c}\vec{v} \tag{12.43}$$

として、

$$K(t') = 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta} \tag{12.44}$$

であることが分かりました。この K を用いて、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{KR}\right] \tag{12.45}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{v}}{KR}\right] \tag{12.46}$$

と書くことができます。K の部分は、ドップラー効果を表す項で走る方向へ場が「つまる」様子を表します。

ここで得られたポテンシャルを「リエナール・ヴィーヒェルトのポテンシャル」と呼びます。ここから電場や磁場を計算していくことができますが、それなりにかなり大変な計算になるので割愛します。詳しくは電磁気学の教科書などを参照してください。ここで見たかったことは、相対論によって場が伝搬していく速さが有限になるために、同時刻ではなく過去からの影響を集めてくる形にしなければならないということです。これが相対論的な場の理論の特徴になります。

12.4 制動放射

さらに点電荷が加速度運動している状況を考えます。前節のリエナール・ヴィーヒェルトのポテンシャルから電磁場を計算し、そこから加速度に比例する項を抜き出すと、これはいわゆる「放射項」と呼ばれるもので、

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{1}{K^3 R}\vec{n}\times\left((\vec{n} - \vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right] \tag{12.47}$$

$$\vec{B}_{rad} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left[\frac{1}{K^3 R}\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\left((\vec{n} - \vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right)\right] \tag{12.48}$$

となります。近似として、β が十分小さく、$R \sim r = |\vec{x}|$ とみなしてよい場合を考えます。このとき、遅延効果は無視して良いので $[\vec{n}] = \vec{n}$ とみなしてよく、

$$\vec{E}_{rad} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c r}\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}) \tag{12.49}$$

$$\vec{B}_{rad} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}_{rad} \tag{12.50}$$

となります。これから点電荷から放射される電磁波のエネルギーは、

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c}\dot{\beta}^2 \tag{12.51}$$

になります。この辺の計算はやはり電磁気学の教科書などを参照してください。

この結果から分かることは、点電荷が加速度運動するとき、その加速度の 2 乗に比例するエネルギーを電磁波として放出し続けるということです。これは電子を金属に当てた時にでる X 線の発生メカニズムの一つですが、これが物理学に大きな課題を課すことになります。

それはラザフォードが 1911 年に原子の模型として、重い原子核の周りを電子が回っているというモデルを提唱したときに問題になりました。これは今の私たちが持っている原子のイメージに近いものですが、円運動というものは加速度運動です。つまり、電子が原子核の周りを「回る」ことによって電磁波が発生し、電子はエネルギーを失うことになってしまいます。

これによって電子の軌道半径が 0 になってしまうまでの時間を計算してみましょう。以下、電子質量 m、素電荷 e、電子の円運動の半径 r として計算します。

円運動の角速度を ω とおくと、運動方程式は、

$$mr\omega^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{12.52}$$

と書けます。電子の持つ力学的エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{12.53}$$

ですが、$v = r\omega$ を用いると運動方程式と組み合わせた、

$$mv^2 = mr^2\omega^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{12.54}$$

なので、エネルギーは、

$$E = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{12.55}$$

です。また、制動放射によるエネルギー損失は、

$$P = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 c}\frac{a^2}{c^2} \tag{12.56}$$

ですが、加速度は運動方程式より

$$a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^2} \tag{12.57}$$

なので、これを代入して、

$$P = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^2}\right)^2 = \frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3 c^3 m^3 r^4} \tag{12.58}$$

となります。これらの式から、r が原子半径 r_0 から 0 になるまでの時間を計算します。

$$\frac{dE}{dt} = -P \tag{12.59}$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}\right) = -\frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3 c^3 m^3 r^4} \tag{12.60}$$

$$-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3 c^3 m^3 r^4} \tag{12.61}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m^2}\frac{1}{r^2} \tag{12.62}$$

これを積分になおして、r を r_0 から 0 まで積分します。その結果、

$$\frac{12\pi^2\varepsilon_0^2c^3m^2}{e^4}\int_{r_0}^{0} r^2 dt = \int dt \tag{12.63}$$

$$t = \frac{4\pi^2\varepsilon_0^2c^3m^2}{e^4}r_0^3 \tag{12.64}$$

となります。これに具体的な数値を代入すると、・・・になります。つまり一瞬にして電子は原子核にくっついてしまい、原子の大きさを維持できない事になります。

この問題は、量子力学が誕生する契機の一つとなりました。これについては機会があればまたどこかで触れることにしたいと思いますが、相対論からは外れるのでここまでにしたいと思います。しかし、この頃（20 世紀初頭）になると、古典物理学の完成と思われていた電磁気学を突き詰めていくと、どこかで説明のできない問題に突き当たることがはっきりしてきました。これが新しい物理学を開くことにつながったのです。

12.5 古典的な電子モデル

もうひとつ、古典電磁気学の限界を示す現象をみましょう。電磁気学が整備されていく中で、電子の性質を説明するモデルが考えられました。電子を帯電した球体として考えるのがもっともシンプルなモデルでしょう。これについて検討していきたいと思います。

電子が電磁場の中を走るとき、大きさを持つならば自分のある部分が作る電磁場がほかの部分に作用を及ぼします。このような効果を「自己力」といいます。この計算はなかなか大変なものなので割愛しますが、近似の最初の 2 項を書くと電子の半径を a として、

$$F = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^2a}\frac{dv}{dt} + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\frac{d^2v}{dt^2} \tag{12.65}$$

です。第 2 項は前節でみた「制動放射」による反作用です。第 1 項は加速度に比例する項なので、その係数は質量が増えたような効果を及ぼします。そこで、これを「電磁質量」と呼び、

$$m_{m.e.} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^2a} \tag{12.66}$$

と置きます。

さて、ここでこういった電磁場由来の慣性のみが電子の慣性を決めていると仮定してみましょう。いわば力学的性質を電磁場に還元する「電磁場一元論」ともいうべき立場で考えてみます。

このとき、電子が作る場のエネルギー・運動量が、電子のエネルギー・運動量になっていると考えます。いま原点に静止している球対称な電荷分布が作るエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を計算してこれを全空間で積分したものを考えると、

$$\int dVT^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int dVE^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \tag{12.67}$$

となります。これの第 0 列がエネルギー・運動量ベクトル P^μ を与えるので、係数部分を mc^2 とすれば電子が周囲につくる全電場のエネルギーが電子の質量エネルギーになっていると解釈できます。しかし、これを別の慣性系からみると問題が生じます。いまこの系に対して x 軸報告へ速さ v で動く慣性系へローレンツ変換し、そこでのエネルギー・運動量ベクトルを計算すると、

$$P'^\mu = (mc^2\gamma, \frac{4}{3}mv\gamma, 0, 0) \tag{12.68}$$

となってしまい、運動量に余計な係数がついてしまうのです。これではエネルギー・運動量ベクトルが 4 元ベクトルとして変換しないことになってしまいます。

なぜこうなってしまったかというと、エネルギー・運動量テンソルの積分の、空間部分に $\frac{1}{3}$ があるからです。これは電子の表面を外側に押す圧力を表していて、なにもしなければ電子は破裂してしまいます。

そこでポアンカレは電子に硬い殻をかぶせて、破裂を防ごうとしました。それは電子の表面において、

$$T_p^{\mu\nu} = mc^2 \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{12.69}$$

という応力がかかっていればよいことになります。ただし、η は物理的に決めることができない係数です。しかも、これは電磁気以外の「なにか」でなければならないので、電磁場一元論にはなりません。物理に検証不能な仮説を持ち込むことになってしまいます。

ところで、もう一つこのモデルには問題があります。もし電子が大きさを持つ球だとしたら、それは剛体を否定する相対論とそもそも相容れないものです。この観点からも電子は形を保つことはできないのです。そこで球の半径を 0 にする極限を考えると、今度は電磁質量が発散してしまうことになります。このことを先のポアンカレの応力に出てきた η を用いて「繰り込む」こともできますが、こうなるとパラメーターを電子の質量の実測値に合わせて調整するほかなく、帳尻合わせにしかならなくなってしまいます。

このように、相対論＋電磁気学の枠組みは様々な現象を説明するものでしたが、とくに原子より小さい世界に関しては限界があります。そこには量子力学を含めた理論が必要だったのです。ここに挙げた発散の問題などは場の量子論における「くりこみ理論」などである程度解決はしています。しかし、重力場の量子化の問題や、「点」という素粒子モデルを巡る論点はいまだ解決していない問題として残っています。

まとめ：古典的電磁気学の完成と限界点

ここまで、相対論誕生のきっかけとなった電磁気学の問題について、相対論でどのように説明できるかみてきました。「場」の概念は、すべてのものが光速を超えて伝わることができない相対論の枠組みの中で必要不可欠なものでした。そして、場がエネルギーや運動量を持ち、作用・反作用の局所的な意味付けもはっきりと示すことができました。そして、共変性の考え方は電磁気学を見通しよく整理することになりました。

しかし、突き詰めていくと原子以下の物質のミクロな世界に関しては解決できない問題が残りました。ここに挙げたものがすべてではありませんが、原子の安定性の問題は直接、量子力学の誕生につながりましたし、質量や自己力の発散の問題は場の量子論において重要な「くりこみ理論」ができることにつながりました。量子論に関わる話はまた別のところで触れられたらと思います。