第 13 章

等加速度運動の相対論

この章では、非慣性系のもっとも簡単な例として、等加速度運動について考えます。等加速度運動する観測者からみたミンコフスキー時空の様子を調べることによって、相対論において加速度運動がどのように扱われるのか考えてみましょう。

13.1 一定加速度による運動

一方向に一定の加速度で運動する物体が、相対性理論においてどのような運動になるかを考えます。ニュートン力学では、これは等加速度運動で $t-x$ のグラフは放物線になりました。相対性理論では速度に対して運動量が比例にはならないので速度が際限なく増えていくということはありません。相対論では、物体自身が観測する加速度が一定であっても、それを観測する別の慣性系から見ればその物体の速度の増分は一定ではないのです。

それを踏まえて、等加速度運動する物体の運動について考えてみましょう。ここでいう「等加速度」とは、運動する物体自身からみた加速度です。これならば、つねにその系の基準で加速度を扱うので「等加速度」に意味をもたせることが可能になります。

そこで、ある慣性系を系 K とし、時刻 $t=0$ で原点に静止しているようにみえるロケットが等加速度運動をしたときに、この慣性系からみてどのような運動をするのか、という設定で考えます。このロケットの基準系を系 R と名付けてお きます。

加速度を $\alpha = \frac{a}{c}$ として、光速を基準とした単位にしておきます。いま、ミンコフスキー時空 (x^0, x^1) として、このロケットの系 K における経路を $(x^0(\tau), x^1(\tau))$ と書くことにします。ここで τ はロケットの固有時間です。このとき、ミンコフスキー時空での速度ベクトルは、

$$u(\tau) = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}\right) \tag{13.1}$$

で定義されます。この速度ベクトルの変化を考えましょう。

ある時刻における速度ベクトル $u(\tau)$ と、それから微小時間 $\Delta\tau$ 経過したときの速度ベクトル $u(\tau+\Delta\tau)$ との関係を考えます。ロケットの系 R から見て、静止系 K はつぎつぎに遠ざかる系へと「乗り換えて」行くようにみえます。したがって微小時間 $\Delta\tau$ で、速さは $\alpha\Delta\tau$ だけ増えていますから、$u(\tau+\Delta\tau)$ を $\Lambda(\alpha\Delta\tau)$ でローレンツ変換すると、もとの速度ベクトル $u(\tau)$ に戻るはずです。ということは逆に、

$$u(\tau+\Delta\tau) = \Lambda(-\alpha\Delta\tau)u(\tau) \tag{13.2}$$

という関係になります。ここでローレンツ変換の具体的な中身を考えます。$-\alpha\Delta\tau$ でのローレンツ変換ですから、その行列は、

$$\Lambda(-\alpha\Delta\tau) = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} 1 & \alpha\Delta\tau \\ \alpha\Delta\tau & 1 \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

ですが、$\Delta\tau$ が十分小さいとき、ローレンツ因子はほぼ 1 に等しいので、単位行列 E と、行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.4}$$

を用いて、

$$\Lambda = E + \alpha\Delta\tau A \tag{13.5}$$

と書けます。したがって、式 (13.2) は、

$$u(\tau + \Delta\tau) = (E + \alpha\Delta\tau A)u(\tau) \tag{13.6}$$

と書き直せます。これを変形して、

$$\begin{aligned} u(\tau + \Delta\tau) &= u(\tau) + \alpha\Delta\tau A u(\tau) \\ u(\tau + \Delta\tau) - u(\tau) &= \alpha\Delta\tau A u(\tau) \\ \frac{u(\tau + \Delta\tau) - u(\tau)}{\Delta\tau} &= \alpha A u(\tau) \end{aligned}$$

となりますので、$\Delta\tau \to 0$ の極限をとって、

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha A u \tag{13.7}$$

という微分方程式が得られます。これはベクトルに対する行列係数の微分方程式ですが、通常の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{13.8}$$

の解が $x(t) = x(0)e^{at}$ となるのと同様に、微分方程式 (13.7) の解は、

$$u(\tau) = e^{\alpha\tau A} \cdot u(0) \tag{13.9}$$

となることが知られています[*1]。ここで、行列の指数関数は、テーラー展開によって、

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \tag{13.10}$$

のように定義されるものです。行列は一般に可換ではないので計算には注意が必要ですが、ここでの議論にはかかわらないので深入りはしません。さて、この級数を具体的に計算してみると、$A^2 = E$ であることを用いると、

$$e^{\alpha\tau A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\tau)^{2n}}{(2n)!} E + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!} A = \cosh(\alpha\tau)E + \sinh(\alpha\tau)A \tag{13.11}$$

と双曲線関数を用いて表せるので、

$$u(\tau) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha\tau) & \sinh(\alpha\tau) \\ \sinh(\alpha\tau) & \cosh(\alpha\tau) \end{pmatrix} u(0) \tag{13.12}$$

が、この微分方程式の解になります。このロケットは、時刻 $\tau = 0$ では静止していますから、

$$u(0) = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13.13}$$

です。したがって、

$$\frac{dx}{d\tau} = u(\tau) = \begin{pmatrix} c\cosh(\alpha\tau) \\ c\sinh(\alpha\tau) \end{pmatrix} \tag{13.14}$$

になります。これをさらに積分して、

$$x^0 = \frac{c}{\alpha}\sinh(\alpha\tau) + c^0 \tag{13.15}$$

$$x^1 = \frac{c}{\alpha}\cosh(\alpha\tau) + c^1 \tag{13.16}$$

(c^0, c^1 は積分定数) となるので、最初に原点にいるという条件から、解は、

$$x^0 = \frac{c}{\alpha}\sinh(\alpha\tau) \tag{13.17}$$

$$x^1 = \frac{c}{\alpha}\left(\cosh(\alpha\tau) - 1\right) \tag{13.18}$$

[*1] 詳しいことは物理数学の本などでリー代数について参照してください。

のように定まります。これから双曲線関数を消去すると、

$$\left(x^1 + \frac{c}{\alpha}\right)^2 - (x^0)^2 = \frac{c^2}{\alpha^2} \tag{13.19}$$

という双曲線を描くことがわかります。この双曲線は、$(0, \frac{c}{\alpha})$ を通る傾き 1 の漸近線が存在します。

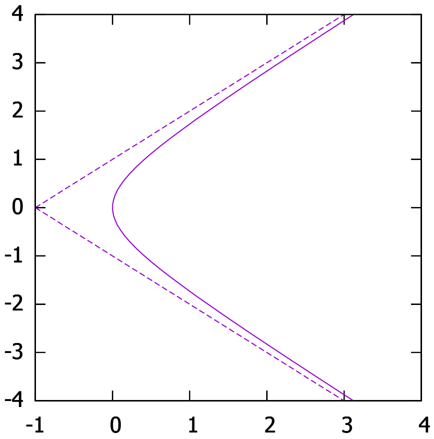

図 13.1　リンドラー座標の座標軸。実線が時間軸、点線が空間軸であり、空間軸は 1 点へ集まることが分かる。

これはこの点を出た光は、ロケットの世界線に交わらない、つまり追いつかないことを意味します。つまり、この点、あるいはこれより負の側にある点から出た光はこのロケットからは観測できないことになり、ロケットの立場からするとこの点に何か見えない壁があるように見えます。このように光すら届かない、物理的に隔絶された領域があるのが、加速度運動や重力場があるときの特徴ですが、こうした領域との境界を「事象の地平線」と呼びます。今回の場合は、実際の時空にこうした境界があるのではなく、観測者の運動によって現れる地平線なので「見かけの地平線」と呼ぶ場合もあります。

13.2　双曲線運動する系からみた座標系

さて、次にやりたいことは、このロケットからみた座標系 (x'^0, x'^1) を求めることです。ロケットにとっての時間軸は自分自身の世界線ですから、前節で求めた双曲線が $x'^0 = 0$ の軸になります。その上にロケットの固有時を用いて $x'^0 = c\tau$ で座標の目盛をふっていくことになります。その上で、系 K からみた座標 (x^0, x^1) と (x'^0, x'^1) の間の関係式を求めましょう。

いま時間軸上の点 $(x'^0, 0)$ にいるロケットからみた同時刻線を考えると、これはこの点における速度ベクトル u に対してミンコフスキー時空の意味で直交する方向になります。これは前節の途中で出てきた u から $(\sinh(\alpha\tau), \cosh(\alpha\tau))$ になることが分かります。そこで、ロケットの世界線上の点 $(\frac{c}{\alpha}\sinh(\alpha\tau), \frac{c}{\alpha}\cosh(\alpha\tau))$ から傾き $\tanh(\alpha\tau)$ の直線を引きます。この式を計算すると、

$$x^0 = \tanh(\alpha\tau)\left(x^1 + \frac{c}{\alpha}\right) \tag{13.20}$$

となり、同時刻線は $(0, -\frac{c}{\alpha})$ を通る傾き $\tanh(\alpha\tau)$ の直線ということになります。つまり、ロケットからみると、いつでも $(0, -\frac{c}{\alpha})$ という「事象の地平線」上の事象は同時刻として観測されることになります。これはこの事象の時間が止まっているようにみえる、といいかえることもできるでしょう。また、この直線上で「事象の地平線」より負の側にある点は観測されません。

さて、この同時刻線がこの時刻における空間座標軸になるので、この直線上に空間座標の目盛をふっていくことになります。この目盛はロケットからみた距離でつけなければなりません。この場合の距離は、2 点のミンコフスキー

的な距離 $s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$ が負になる領域なので $\sqrt{-s^2}$ として決めるのが妥当でしょう*2。したがって、この直線にそって、$(x'^1 \sinh(\alpha\tau), x'^1 \cosh(\alpha\tau))$ 進んだ点が、ロケットからみた (x'^0, x'^1) の点ということになります。具体的に書くと、

$$x^0 = \frac{c}{\alpha}\sinh(\frac{\alpha}{c}x'^0) + x'^1\sinh(\frac{\alpha}{c}x'^0) = \left(\frac{c}{\alpha} + x'^1\right)\sinh(\frac{\alpha}{c}x'^0) \tag{13.21}$$

$$x^1 = \left(\frac{c}{\alpha} + x'^1\right)\cosh(\frac{\alpha}{c}x'^0) - \frac{c}{\alpha} \tag{13.22}$$

となり、これがロケットからみた座標系 R と慣性系 K の間をむすぶ変換式になります。また、これを逆に解けば、

$$x'^1 = \sqrt{\left(x^1 - \frac{c}{\alpha}\right)^2 - (x^0)^2} - \frac{c}{\alpha} \tag{13.23}$$

$$x'^0 = \frac{c}{\alpha}\tanh^{-1}\left(\frac{x^0}{x^1 - \frac{c}{\alpha}}\right) \tag{13.24}$$

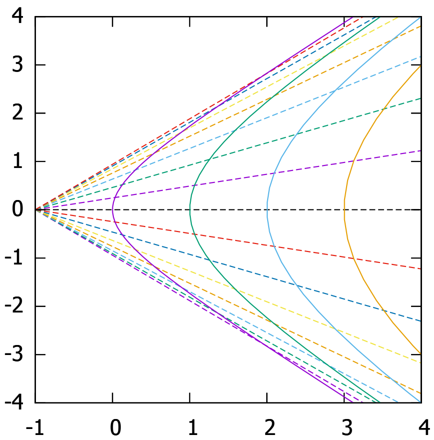

図 13.2　リンドラー座標の座標軸。実線が時間軸、点線が空間軸であり、空間軸は 1 点へ集まることが分かる。

この座標系はリンドラー座標という名前がついています。これが、等加速度運動する観測者からみた座標になります。ここで一つ注意していただきたいのが、座標軸が曲がっているからといって、これが曲がった時空を表すと考えてはいけないということです。これはあくまで平坦なミンコフスキー時空上に「曲がった座標系」を導入したにすぎません。座標の引き方はその時空の「形」を変えるわけではないので注意が必要です。これは次章で扱う回転座標系とは事情が違う点です。

13.3　リンドラー計量

つぎに、ロケットからみた座標系における 4 元距離はどのように計算されるか考えてみましょう。これはこの座標系からみた運動を考える際に必要なものです。 4 元距離の定義式に前節の変換の結果を代入してみましょう。まずは、変換式を微分して、それぞれの座標線素を計算します。

$$dx^0 = \left(\frac{c}{\alpha} + x'^1\right)\cosh(\frac{\alpha}{c}x'^0)\frac{\alpha}{c}dx'^0 + \sinh(\frac{\alpha}{c}x'^0)dx'^1 \tag{13.25}$$

$$dx^1 = \left(\frac{c}{\alpha} + x'^1\right)\sinh(\frac{\alpha}{c}x'^0)\frac{\alpha}{c}dx'^0 + \cosh(\frac{\alpha}{c}x'^0)dx'^1 \tag{13.26}$$

となります。それぞれの第 1 項をもう少しまとめておくと

$$dx^0 = \left(1 + \frac{\alpha}{c}x'^1\right)\cosh(\frac{\alpha}{c}x'^0)dx'^0 + \sinh(\frac{\alpha}{c}x'^0)dx'^1 \tag{13.27}$$

$$dx^1 = \left(1 + \frac{\alpha}{c}x'^1\right)\sinh(\frac{\alpha}{c}x'^0)dx'^0 + \cosh(\frac{\alpha}{c}x'^0)dx'^1 \tag{13.28}$$

*2 座標系をこのときの速度 $\beta = \alpha\tau$ でローレンツ変換し、この直線が真横の直線となるように変換して考えても同じことになります。しかし、ミンコフスキー的な距離はローレンツ変換に対して不変なのでこれをもとにして考えるのがもっとも楽な方法でしょう。

となり、線素の式にこれを代入してまとめると、

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 \tag{13.29}$$
$$= \left(1 + \frac{\alpha}{c}x'^1\right)^2 (dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 \tag{13.30}$$

となります。したがって、計量は場所によって変化します。これは曲線座標なので当然のことなのですが、それでも空間が曲がっているわけではない、という事情は変わりません。実際、この計量から時空の曲がりぐあいを表す「曲率テンソル」というものを計算すると 0 になります*3。

しかし、計量が変化するということは物理にはどう影響するのでしょうか。今回のリンドラー座標では、計量の空間部分には影響がなく、時間部分の g_{00} のみが変化しました。これは、ロケットからみて離れたところにある $(x'^1 \neq 0)$ の点に静止している時計*4をみると、この時計の座標時間はその時計自身の固有時の $\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$ 倍になります。つまり、加速度は、自分から離れた点での時間の進み方が変化するようにみえる効果を生むことになります。その点が加速度の方向からみて前方にあれば、その固有時は自分の時計よりも速く進んでいるようにみえるでしょう。逆に加速の方向からみて後方にある点では、固有時がゆっくり進むように見えます。そして、「事象の地平線」に到達すると、ついには時計は止まってしまうのです。これは前節での考察とも一致します。この議論はそのまま、双子のパラドックスで有限の加速度で U ターンした場合に適用できます。U ターンでは減速し、地球方向へ加速するわけですから、その間は一定して地球の方向へ加速度が働きます。その間、加速度の方向にある離れた地球の時計はいっきに進むようにみえるのです。これが地球に残った方の年齢が高くなることの説明になります。これについては、後ほど詳しく検討することにします。

ローレンツ変換では時間の遅れが生じましたが、加速度はこれとは別に時計の進み方に影響を及ぼします。これはあくまで特殊相対性理論の範囲内で議論をすすめてきた結果であり、一般相対性理論を使っているわけではありません。

以下、この章の後半では、計量が時空に依存して変化する場合についてのもう少し一般的な議論をして、今後の準備としたいと思います。まず最初に、「同時性」の概念がどのように変化を受けるか、ということについて考えます。また、解析力学の章での議論を変化する計量のもとで考え直し、計量が変化する場合に変分がどのようになるのかを計算することで、加速度系からみた力学について考えることにします。

13.4 計量が変化する場合における「同時性」

まずは、第 3.2 節での同時性の議論を、計量が変化する場合について考えてみましょう。いま時空内に座標 x^μ が張られているとします。このとき、時間の経過、ということはとりあえず忘れて、時空の点に空間座標 x^i のラベルが書かれた時計が置いてあり、その時計の指す時刻が時間座標 x^0 ということで考えます。そして、この座標系において時計が「同期」されているのかを以下の手順で検証します。

ミンコフスキー座標とちがって、いまは計量が変化するようなもっと自由な座標*5を考えていますから、いきなり離れた 2 点での同時性を決めることはできません。ある一つの空間上の点 x^i を基準ときめ、そこの時計は信用できるとしましょう。信用できる、というのは、そこでの時計の進み dx^0 と実際の固有時の進み $cd\tau$ の関係が、

$$c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0) \tag{13.31}$$

という関係で結ばれていることは認めよう、ということです。さて、このとき、少し離れた点 $x^i + dx^i$ にいる時計との同期を考えます。これは第 3.2 節での議論と同様、この 2 点間で光を往復させ、その間の同期を行うことを考えます。ここで簡単のために、計量が時間に依存しない場合、いわゆる「定常」な場合に限定します。前節のリンドラー計量や、次章以降で扱う予定の回転座標系など、本書で扱う範囲ではこれで十分です。

*3 一般相対論やリーマン幾何学をご存知の方は、曲率を実際に計算してみればそれが 0 になることが理解できると思います。
*4 当然、これは静止系からみれば加速度運動していることになりますが。
*5 とはいえ、座標は連続で最低 2 階は微分可能としておきます。

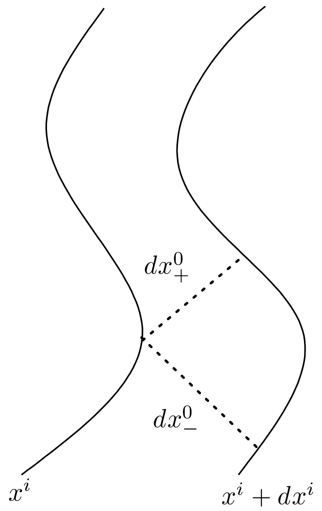

図 13.3　2 つの経路の間で光通信をする

光の経路はヌル測地線でしたから、片道で時間座標が進む幅 dx^0 と dx^i は以下の式を満たします。

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{13.32}$$

ここで $g_{\mu\nu}$ は対称なことを用い、dx^0 を決める 2 次方程式としてみれば、

$$g_{00}(dx^0)^2 + 2(g_{0i})dx^i dx^0 + g_{ij} dx^i dx^j = 0 \tag{13.33}$$

となります。これの判別式を $4D$ とすると、

$$D = (g_{0i}dx^i)^2 - g_{00}g_{ij}dx^i dx^j = (g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j \tag{13.34}$$

です。最後の式では、ダミー添字を書き換えて $g_{0i}dx^i = g_{0j}dx^j$ と書き直しました。この D が 0 でないならば、解は 2 つあり、それを

$$dx^0_\pm = \frac{-g_{0i}dx^i \pm \sqrt{D}}{g_{00}} \tag{13.35}$$

と置きましょう。これは往復で所要時間が違う、ということを意味します。

いま、x^μ での計量の値を使って計算しているので、その点から出る 2 つの経路が考えられます。一つが、その点から出発して隣の点 $x^i + dx^i$ に達する時間 dx^0_+ と、$x^i + dx^i$ からきた光がその点に達するまでにかかった時間 dx^0_- です。したがって、点 $x^i + dx^i$ を時刻 $x^0(x^i + dx^i) = a$ に出発した光が、x^i に到着したときの時刻の読みを $x^0(x^i) = b$、その光が反射して $x^i + dx^i$ に戻ってきた時刻を $x^0(x^i + dx^i) = c$ とすると、同期がなされている条件は、

$$b = \frac{a+c}{2} \tag{13.36}$$

となっていることになります。ここで、

$$b = a - dx^0_- \tag{13.37}$$

$$c = b + dx^0_+ \tag{13.38}$$

の関係がありますから、

$$\frac{a+c}{2} = b + \frac{dx^0_+ + dx^0_-}{2} \tag{13.39}$$

になるので、同期されている条件は、

$$dx^0_+ + dx^0_- = -\frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}} \tag{13.40}$$

が 0 になることですが、これは計量の g_{0i} 成分が 0 になることと同値です。

ただ、この座標はかなり自由な設定ですから、この差が座標のとり方によるもので、時刻の振り方で解消できるものの可能性があります。実際、あるスカラー関数 $\phi(x^i)$ があって、

$$x'^0 = x^0 - \phi(x^i) \tag{13.41}$$

という変換をしたときに、ちょうど、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} \tag{13.42}$$

となるようにすれば、座標変換でこの差を吸収することができます。このような形の関数 ϕ の存在条件は、ベクトル解析でよくしられているように、ポテンシャルの存在条件で、

$$\vec{\nabla} \times \frac{g_{0i}}{g_{00}} = 0 \tag{13.43}$$

となることです。この場合は、座標変換を行うことによって、時空全体にわたって同期された時間座標を敷くことができます。この場合、この計量は「静的」と呼ばれます。

静的でない計量の場合、「同時」の概念は時空全体では通用せず、2 つの事象が同時かどうかは、どのような経路で時計を合わせたかということに依存します。つまり、一貫した「時刻」という概念が使えなくなってしまうのです。これについては、次章の回転座標系を例にして、具体的にみることにします。

前節のリンドラー座標は、もとから $g_{0i} = 0$ ですから、静的であり、時空に一貫した時間座標を敷くことができたのでした。

時空が静的でない場合の 2 点間の「空間的距離」についてもみておきましょう。いまの議論から、2 点間の距離 l は光が往復する時間に光速をかけたものと考えられますから、

$$l^2 = c^2 d\tau^2 = \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 \cdot g_{00} = \left(\frac{dx^0_+ - dx^0_-}{2}\right)^2 \cdot g_{00} \tag{13.44}$$

となります。ここに先程の解を代入すれば、

$$\frac{dx^0_+ - dx^0_-}{2} = \frac{\sqrt{D}}{g_{00}} = \frac{\sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j}}{g_{00}} \tag{13.45}$$

よって、

$$l^2 = \frac{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j}{g_{00}^2} \cdot g_{00} \tag{13.46}$$

$$= \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right) dx^i dx^j \tag{13.47}$$

したがって、空間計量 γ_{ij} を、

$$\gamma_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \tag{13.48}$$

で定義すれば、これが空間座標から空間的な距離を求めるための計量になります。もちろん、計量が静的ならば $\gamma_{ij} = -g_{ij}$ で、計量の空間成分がそのまま空間計量に対応することになります。

13.5 計量が変化する場合の相対論的力学

次に、第 8.3 節の内容を、計量が変化する場合について検討してみましょう。

粒子のラグランジアン L は、

$$L = m \int ds \tag{13.49}$$

でしたが、前の議論では計量がミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ で定数でしたが、今度は計量の微分が 0 ではありません。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{13.50}$$

を変分すると、

$$2ds\delta(ds) = 2c^2 d\tau\delta(d\tau) = \delta(g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}\delta(dx^\mu)dx^\nu + g_{\mu\nu}dx^\mu\delta(dx^\nu) \tag{13.51}$$
$$= g_{\mu\nu,\lambda}\delta x^\lambda dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\lambda}dx^\mu\delta(dx^\lambda) \tag{13.52}$$

となります。ここで、変分と微分は交換が可能なので、第 2 項を

$$\delta(dx^\lambda) = d(\delta x^\lambda) \tag{13.53}$$

で書き換え、また、線素 dx^μ を 4 元速度を用いて $u^\mu d\tau$ で置き換えると、$d\tau$ の変分は、

$$c^2\delta(d\tau) = \left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}u^\mu u^\mu\delta x^\lambda + g_{\mu\lambda}u^\mu\frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau}\right]d\tau \tag{13.54}$$

となることがわかります。よって、

$$c^2\delta\int d\tau = c^2\int\delta(d\tau) \tag{13.55}$$
$$= \int\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}u^\mu u^\mu\delta x^\lambda + g_{\mu\lambda}u^\mu\frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau}\right)d\tau \tag{13.56}$$

となります。ここで、第 2 項に部分積分を用いて微分を付け替えます。そうすると、

$$\int g_{\mu\lambda}u^\mu\frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau}d\tau = \left[g_{\mu\lambda}u^\mu\delta x^\lambda\right] - \int\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\lambda}u^\mu)\delta x^\lambda d\tau \tag{13.57}$$

ですが、第 1 項は境界上で変分は 0 になるので消え、第 2 項の微分は、

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\lambda}u^\mu) = g_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{d\tau} + g_{\mu\lambda,\nu}u^\mu u^\nu \tag{13.58}$$

になります。さらに、この第 2 項は、計量の対称性より

$$g_{\mu\lambda,\nu}u^\mu u^\nu = g_{\lambda\mu,\nu}u^\mu u^\nu = \frac{1}{2}\left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu}\right)u^\mu u^\nu \tag{13.59}$$

と変形できます。だいぶわざとらしい変形ですが、もとの変分で出てくる $\frac{1}{2}$ に合わせるため、ぐらいに今のところは思っていただいてよいと思います。

さて、以上を用いて変分を書き直すと、

$$c^2\delta\int d\tau = -\int\left\{g_{\mu\lambda}\frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}\left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}\right)u^\mu u^\nu\right\}\delta x^\lambda d\tau \tag{13.60}$$

この被積分関数の中に現れる第 2 項の部分はクリストッフェル記号と呼ばれるもので、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}\right) \tag{13.61}$$

と書かれます。これは微分幾何学ではよく出てくる記号で、共変微分と呼ばれる微分操作と関わるものです。さらに第 1 項の前の計量を消すために $g^{\sigma\lambda}$ を掛けて縮約することで、変分を 0 にする経路の微分方程式として、

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0 \tag{13.62}$$

が得られます。これは微分幾何学でいう「測地線」の方程式であり、計量が変化する場合の「直線」を引くための方程式です。つまり、変分原理として経路に沿った固有時の変分が 0 になることを仮定すれば、自由な（外から力が働かない）粒子の軌道は、その時空における測地線になる、ということが結論されました。

これを第 8 章の結果と比べると、第 2 項のクリストッフェル記号の部分が余計になっています。これを前のリンドラー座標の場合に計算してみましょう。

いま、計量の微分で 0 にならないものは、

$$g_{00,1} = \frac{2\alpha}{c}\left(1 + \frac{\alpha x}{c}\right) \tag{13.63}$$

だけです。そのため、測地線方程式も $\sigma = 1$ 以外は変更を受けないので、

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0 \tag{13.64}$$

だけが残ります。いま、速度が光速に比べて十分小さいときの近似を考えると、$u^0 \approx c \gg u^1 = v$ より、

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + c^2\Gamma^1{}_{00} = 0 \tag{13.65}$$

と近似できます。クリストッフェル記号を具体的に計算すると、

$$\Gamma^1{}_{00} = g^{10}\Gamma_{000} + g^{11}\Gamma_{100} = -\Gamma_{100} \tag{13.66}$$

$$\Gamma_{100} = \frac{1}{2}\left(g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}\right) = -\frac{1}{2}\frac{2\alpha}{c}\left(1 + \frac{\alpha x}{c}\right) = -\frac{\alpha}{c}\left(1 + \frac{\alpha x}{c}\right) \tag{13.67}$$

観測者から十分近い領域では $\frac{\alpha x}{c} \ll 1$ とできるので、結局、

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + c\alpha = 0 \tag{13.68}$$

となり、自由粒子にも加速度が働くという、ニュートン力学でいう「慣性力」の効果を表しています。当たり前の結果ではありますが、それが再現できたというところに意味があります。ただし、何度もいうようですが、これはあくまで平坦な時空の話であって、真に曲がっている時空の話ではありません。あくまで観測者の加速度運動による見かけのものです。

次の章では、これとは本質的に違う状況として、回転座標系について相対論的に考えてみます。