第 14 章

回転座標系の相対性理論

前章では等加速度直線運動を扱いましたが、この章では次に基本的な加速度運動である等速円運動について考えます。これは、観測者が原点にいて、一定の角速度で回転しているときに、世界がどのように見えるのか、ということです。これは今までのものとはかなり違った世界に入ります。

14.1　エーレンフェストのパラドックス

１９０９年、エーレンフェストはボルン剛体[*1]について、剛体が回転しているとすると、次のような矛盾が生じると指摘しました。

半径 R の円盤が角速度 ω で回転しているとします。このとき、半径方向は運動と垂直のためローレンツ短縮しませんが、円周 l に関してはローレンツ短縮が起こり、

$$l = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \left(\frac{R\omega}{c}\right)^2}} \tag{14.1}$$

になります。これは円周率が π でなくなるということであり、ユークリッド幾何がなりたたなくなります。一方、この円盤上で静止している人から見れば、円盤は円のはずですから円周率も変わらず π です。これをエーレンフェストのパラドックスといい、この場合、剛体という概念に疑問がつくことになります。

以下では、実際に回転する観測者から、どのような世界が観測されるのかを詳しくみていくことにしましょう。

14.2　回転座標系の計量

相対論の問題は、計量をしっかり計算すれば、まずはその世界についての情報がほぼ得られます。回転座標系への変換は、円柱座標を使うのが便利でしょう。これはもとの座標 (t, r, θ, z) から、回転する座標 $(t, r, \theta - \omega t, z)$ への変換ということになります。

円柱座標における計量は、今回は円盤を考えているので dz を省略して、

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2) \tag{14.2}$$

となります。座標変換の式により

$$d\theta = d\theta' + \omega dt' \tag{14.3}$$

ですから、これを回転座標系における計量へ変換すると、

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2dt'^2 - \left\{dr'^2 + r'^2\left(d\theta' + \omega dt'\right)^2\right\} && (14.4) \\ &= c^2dt'^2 - \left\{dr'^2 + r'^2\left(d\theta'^2 + 2\omega d\theta dt' + \omega^2dt'^2\right)^2\right\} && (14.5) \\ &= (c^2 - r^2\omega^2)dt'^2 - \left\{dr'^2 + r'^2d\theta'^2 + 2r'^2\omega dt'd\theta'\right\} && (14.6) \end{aligned}$$

[*1] 相対論では剛体というものは基本的に否定されますが、マックス・ボルンは剛体の概念を相対論に適合するように拡張することを試みました。これが１９０９年のことで、エーレンフェストの論文はこれを受けたものです。

となります。この計量から何が分かるでしょうか？

まず、回転座標系に静止した時計 $(dr' = d\theta' = 0)$ は、

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right) dt'^2 \tag{14.7}$$

となり、もとの静止系の時計に対して固有時が遅れることになります。これは普通に、その半径における回転速度に対応したローレンツ短縮として理解することができますが、半径が大きくなるとその速度が光速に達してしまい、、みかけ上の「壁」があるようにみえます。

前章における議論に合わせるために、$x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta$ と置きます。これによって計量を書けば、時計合わせの議論においては、

$$dx^0_+ + dx^0_- = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i = \frac{(x^1)^2\omega c}{c^2 - (x^1)^2\omega^2} dx^2 \tag{14.8}$$

となります。これのローテーションは 0 にはなりませんから、この座標系は静的ではありません。dx^2 に依存するので、回転方向に対して順方向と逆方向で、同時性が変わってくるということを意味します。つまり、回転座標系では全時空に一意の時刻というものを設定することができないのです。

また、空間計量について計算すると、空間計量に関係するもののうち、0 でないのは g_{02} のみですから、

$$\gamma_{11} = -g_{11} \tag{14.9}$$

$$\gamma_{12} = 0 \tag{14.10}$$

$$\gamma_{22} = \frac{(x^1)^4\omega^2}{c^2 - (x^1)^2\omega^2} + (x^1)^2 = \frac{(x^1)^2}{1 - \frac{(x^1)^2\omega^2}{c^2}} \tag{14.11}$$

となります。これを用いて円盤の円周を計算すると、

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_{22}} dx^2 \Big\|_{x^1=R} = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \left(\frac{R\omega}{c}\right)^2}} \tag{14.12}$$

となります。これはエーレンフェストの結果と同じです。これはどのように解釈できるでしょうか？同時刻が経路によって変わるということは、同時刻面が単純な平面などではなくて、曲面になっていることを意味します。つまり、時空のなかで同時にみえる点をつないだ空間は、時刻ラベル t' が等しい点の集まりにならないだけでなく、曲がった空間になることを意味しているのです。リンドラー座標では、それでも一方向に曲げられただけなので曲率は 0 でした[*2]。しかし、回転座標系の場合は曲がった空間になります。計算はかなり大変ですが、この空間計量 γ_{ij} のスカラー曲率を計算すると、0 にならないことが確認できます[*3]。

円運動によって生じる加速度は、一様な加速度で消すことはできません。それが、前章の等加速度運動との大きな違いです。その意味では、これまでの特殊相対論の枠組みからはずれるものではありますが、時空そのものの幾何は平坦なままです。そこに埋め込まれた「同時面（空間）」が曲がった空間になるのです。そういう意味では、まだ一般相対性理論の範疇に入ってはいないのです。

14.3 サニャック効果

さて、同時性の大域性が崩れる、ということが実際にありえるのか、ということを思う方もいるでしょう。そこで実際にこの効果を用いた応用例を一つ紹介しましょう。

これはサニャック効果と呼ばれるものです。円形の経路を光が伝わる状況を考えます。このとき、このリング自体が回転運動している場合、リングを左回りに進んだ光と、右回りに進んだ光とでは時間経過が異なります (図 14.1 参照)。

[*2] これは平面を丸めた円柱や円錐面は全曲率 0 になる事情と同じです。

[*3] 筆者は少しずるをして、maxima というソフトで計算しました。その結果は $\frac{-6c^2\omega^2}{(c^2-r^2\omega^2)}$ というものでした。

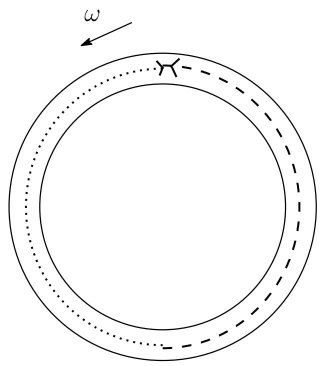

図 14.1　サニャック効果の概念図。左回り（点線）と右回り（破線）で位相が異なる。

具体的には、リングの半径を r として、

$$dt = \frac{r^2\omega}{c^2 - r^2\omega^2} d\theta \tag{14.13}$$

となるので、時間経過の差 Δt は、

$$\Delta t = \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi r^2\omega}{c^2 - r^2\omega^2} \tag{14.14}$$

となります。ここで回転速度が十分おそく、$c >> r\omega$ とできる場合、

$$\Delta t = \frac{2\pi r^2}{c^2}\omega \tag{14.15}$$

と近似できます。これは 1911 年にハレスが実験し、1913 年にサニャックが実験・説明したもので、サニャック効果（あるいはハレスーサニャック効果）と呼ばれています。この数式を解釈すると、円の面積と角速度に比例すると取ることができます。このように見ると同じような位相の変化として現れる「ボームーアハロノフ効果」に似ている、とも見えます。一方、これを円周 $l = 2\pi r$ と回転速度 $v = r\omega$ で書けば、

$$\Delta t = \frac{l}{c}\frac{v}{c} \tag{14.16}$$

となって、円周を光が走る時間と回転速度（の光速との比）の積と解釈することもできます。

レーザーをリングを通して、右回りと左回りの光を干渉させることで、この時間差を計測することができます。 1 つのレーザー光から枝分かれした光が同じ長さの経路を通り、同じ「時」に同じ「場所」に到達したのに、経路によってかかった時間が異なる、ということが起きるのです。

この現象は、一種のジャイロ（物体の回転運動を検出する装置）として実用化されています。いまの計算過程でも分かるように、回転速度が光速に比べて小さい場合にも、このサニャック効果は検出できます。また、GPS の時間補正にもサニャック効果の考慮が必要であり、大域的時間が定義できないという常識的な感覚では受け入れられないような現象も、実際に起きていることが分かります。

14.4　回転座標系の力学

この章の最後に、計量を用いて力学がどのような変更を受けるのか見ておきましょう。

クリストッフェル記号の 0 でない成分は次のようになっています。

$$\Gamma^1_{00} = -r\omega^2 \tag{14.17}$$
$$\Gamma^2_{00} = \frac{\omega}{r} \tag{14.18}$$
$$\Gamma^1_{02} = -r\omega \tag{14.19}$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \tag{14.20}$$
$$\Gamma^1_{22} = -r \tag{14.21}$$

これから運動方程式がどのようになるか書いてみますと、

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{r}{1-\frac{r^4\omega^4}{c^4}}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \tag{14.22}$$
$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\frac{2}{r\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} \tag{14.23}$$

となります。ここで非相対論的な近似を行うと、$\tau \to t$ と $r\omega << c$ とおいて、

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = r\omega^2 \tag{14.24}$$
$$r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -2v\omega \tag{14.25}$$

となりますので、第 1 式が遠心力、第 2 式がコリオリ力になることが確認できます。ここでも計量による運動方程式の変更が慣性力として理解できることがわかります。

14.5 まとめ

この章では、回転運動をしている系を相対論的に考えてみました。相対論では「剛体」というものは考えられず運動量は有限の時間で伝わるので、均一に回転する円盤というものを安易に想定することはできません。しかし、サニャック効果のように回転するリングを考えることはできます。そして、回転運動の系では時間の大域性が失われ、「同時」を決める経路によって時間が変わってしまうという現象が起きます。それは、4 次元のミンコフスキー空間に埋め込まれた「同時」な空間が曲がった 3 次元空間となることで説明可能です。ただ、これはあくまで平坦な時空の中に埋め込まれたものであって、時空そのものが曲がる一般相対性理論における重力の効果とは違います。そして、こういった効果は近似的には、ニュートン力学における遠心力やコリオリ力のような慣性力として理解できるのです。