第 15 章

スピンの古典論

特殊相対論の締めくくりとして、トーマス歳差とスピンについて考えたいと思います。これは、向心加速度を受けながら運動する物体の座標系の向きが回転していくという現象です。こうしたことが起こる理由は、異なる向きへのローレンツ変換が非可換であることによるものです。そして、それがスピンの存在と関わっていることを見ていきます。

15.1　ゼーマン効果と初期量子力学の課題

まずは、スピンについて説明しましょう。これがどうして問題になったのか、ということをみていきます。

量子論の誕生は、物質の”色”をめぐる問題から大きく影響を受けています。1 つは黒体輻射（温度と色の関係）であり、もう一つは原子のスペクトル（原子が放射・吸収する離散的な光）です。初期の量子論は、このスペクトルの問題を説明しましたが、より詳しく調べると、スペクトルは複数の光が重なっており、磁場をかけるなどするとそのスペクトルが分裂することが明らかになりました。これをゼーマン効果といいます。さらに、その光よりもさらに小さな差ですが、もっと多くの光に分裂していることも分かりました。これを異常ゼーマン効果といいます。なにが「異常」なのかというと、ゼーマン効果までは電子の軌道角運動量によって説明できますが、異常ゼーマン効果は古典論的には対応する現象がなかったのです。さらに、角運動量 L に対して磁気モーメントは、

$$\mu = \frac{e}{2mc}L \tag{15.1}$$

になりますが、異常ゼーマン効果の場合、これが

$$\mu_s = \frac{2e}{2mc}L \tag{15.2}$$

となって、2 倍になってしまいます。これを g 因子といい、この場合は $g = 2$ ということになります。

この問題について、パウリ、ランデ、ゾンマーフェルトといった物理学者たちが様々なモデルを考えましたが、その詳細には立ち入りません[*1] 。結局は、この問題などから「スピン」という新しい性質が浮かび上がってくるのです。

15.2　「スピン」は古典的に記述可能か？

このスピンが発見される過程で、パウリはこれを「古典的に記述不可能な 2 値性」と表現しました。2 値性とは、電子が内部において 2 つの状態を取りうるということを言っています。パウリはこれを量子論的にのみ記述可能であり、古典論的な対応物はないだろうとしたのです。これにはいくつか理由があります。まずスピン角運動量はディラック定数 $\hbar$ を使って、$\frac{\hbar}{2}$ です。一方、古典的電子半径は、

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \tag{15.3}$$

で表されます。これによれば、この大きさの角運動量を持つための自転速度は、

$$v = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar c}{2e^2}c \approx 10c \tag{15.4}$$

[*1] この辺りについては朝永振一郎『スピンは巡る』に詳しいので、興味のある方はそちらを参照ください。

となります[*2]。したがって、超光速となって実現不可能になってしまうのです。また、2 つの状態を持つというのも量子論的な考えです。

パウリは、とりあえずこの 2 値性を前提として、「パウリの禁制」を用いて元素の周期律などを説明しました。その意味ではスピンの存在は、原子の安定性や周期律、磁性といった、様々な基本的な事柄を説明するためのキー概念です。しかし、スピンの存在は古典論にはない新しい性質と考えられました。

最終的には、ディラックの相対論的量子力学によって、この電子スピンの問題は解決したことになっています。しかし、この g 因子の問題は本当に古典論的に記述はできないのでしょうか？この問に答えたのが、トーマスによる相対論的な計算です。そこで、この文章の締めくくりとして、加速度系の相対論の応用として、このトーマス歳差について考えたいと思います。

15.3　等速円運動する座標系

さて、ここで考えるのは、原子核の周りを周回している電子に固定された座標系です。つまり、つねに向心加速度を受けて等速円運動を行う系で、座標系がどのように変化するかを考えます。

ここで思い出していただきたいのは、以前の議論で、速度と加速度が異なる方向の場合、ローレンツ変換には回転が交じることをみました。円運動では、常に加速度は速度と垂直ですから、この条件にあてはまります。

ここで設定をしておきましょう。円運動の半径 r、角速度 ω として、$v = a\omega\beta_1 = \frac{a\omega}{c}$ です。また、加速度は $a\omega^2$ ですが、$\frac{\beta_2}{\gamma_1} = \frac{a\omega^2}{c^2}dt$ です。これを踏まえて回転角度を計算します。

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2}{1+\gamma_1\gamma_2} \tag{15.5}$$

です。これを変形するわけですが、$\gamma_2 = 1$ と考えていいでしょう。そこで、変形して、

$$\frac{\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2}{1+\gamma_1\gamma_2} = (\gamma_1 - 1)\frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 - 1}\beta_1\frac{\beta_2}{\gamma_1} \tag{15.6}$$

とします。また、

$$\frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 - 1} = \frac{1}{\beta_1^2} \tag{15.7}$$

という関係を用いると、

$$(\gamma_1 - 1)\frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 - 1}\beta_1\frac{\beta_2}{\gamma_1} = (\gamma_1 - 1)\frac{\beta_2}{\beta_1\gamma_1} \tag{15.8}$$

となります。ここで上の設定を代入すると、

$$(\gamma_1 - 1)\frac{\beta_2}{\beta_1\gamma_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)\omega dt \tag{15.9}$$

になります。ここで、さらに平方根に近似を使うと、

$$d\theta = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\omega dt \tag{15.10}$$

ということになります。これをもう少し変形します。この角度の変化を、向心力 $F = mv\omega$ を用いて書き換えると、

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{Fv}{2mc^2} \tag{15.11}$$

となります。

この結果、向心力の大きさと回転速度に比例する大きさで、座標が回転していくことになります。つまり、相対論の効果によって、公転する物体は勝手に自転していくということになるのです。

[*2] この 10 という係数はあくまでオーダーであって、だいたい 6 ぐらいでしょうか。とにかく 1 を超えてしまうのが問題です

15.4　スピンの古典論的描像

さて、これを原子核の周囲を回る電子に適用しましょう。中心の原子核の作る電場を E とおくと、前節の結果は、

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{eEv}{2mc^2} \tag{15.12}$$

となりますが、その電荷の感じる磁場 H が、

$$H = \frac{1}{c}\vec{E} \times \vec{v} \tag{15.13}$$

とかけることを用いれば、

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{e}{2mc}H \tag{15.14}$$

となります。したがって、この作用を磁気モーメントに置き換えるならば、

$$\mu = -\frac{e}{2mc} \tag{15.15}$$

になります。

これからさき、g 因子の説明にまで行くにはかなり複雑な話が必要です。そこで、ここではこの「トーマス歳差」の導出までとして、残りの説明は他書に譲りたいと思います[*3]。とにかく、スピンを説明するためには、光速の 10 倍といった回転速度は必要ないことが分かりました。ここで大切なことは、ローレンツ変換の数学的な性質（非可換性）とスピンの存在が密接に関わっているということです。

しかし、だからと言って、スピンは古典的に（非量子論的に）説明しきれるものでもありません。そもそも 2 つの値を取る「状態」があって、その状態が違えば物理的に他の部分で同じ状態も可能（たとえば、原子の軌道に 2 つ電子が入れるなど）ということは古典的には説明できません。

実際、スピンを完全に記述するには「スピノール」という量を使います。これはローレンツ変換群のなかに現れるもので、相対性理論と量子論の双方がなければ説明できないものです。そういう意味では、スピンは相対論と量子論の間にできた存在と言えるのかもしれません。

15.5　相対論は奥が深い

最後にこの章を置いたのは、相対論を加速度運動に適用するよい例だと思ったからです。ごく単純な円運動であっても、相対論を考慮すると座標系が回転してしまうというのは想像しにくいのではないでしょうか。ローレンツ変換の導出やそれを 1 次元で考えている間はそんなに難しいものではありません。しかし、2 次元以上で考えるとローレンツ変換は非可換になり、複雑な様相を呈してきます。そして、そのローレンツ変換の幾何学的な性質が、素粒子のスピンを始めたとしたもろもろの性質に大きく関わっているのです。この章を通して、そのことの一端でも見ていただけたらと思います。

さて、これでこの文章も終わりです。特殊相対性理論に関わる話はまだまだあると思いますが、それは今後の課題としてここで締めくくりとしておきたいと思います。残った問題やさまざまな例に関しては、今後機会があれば追加していきたいと思います。

また、一般相対性理論の方向もまだ残っています。それについては、さらに深く広い世界が広がります。それもいつか描いてみたいと思います。

[*3] 例えば、朝永振一郎『スピンはめぐる』には詳しく説明があります