第 3 章

特殊相対性理論

この章では、アインシュタインの相対性理論の骨格となる議論とその帰結としてのローレンツ変換についてみていきます。よく「相対性理論は難しくない」といった説明を見かけます。たしかに、この章でみるように、特殊相対性理論、とくにローレンツ変換の導出に使われる数学そのものは簡単です。しかし、相対性理論の本質はそこではないと思います。この理論が提示しているのは、時間や空間に対する普通の感覚を捨てることです。それは決して簡単なことではないでしょう。だからこそ、1905 年ごろの当時も、今に至っても、相対性理論に対する懐疑的な意見が多く出てくるのです。時間や空間の概念は、人間の世界認識の根本にあるものです。それを徹底的に考え直すほどの精神力を持てる人間はそうそういないのではないでしょうか。ここでは、その考え方の部分に焦点を当てつつ、ローレンツ変換と速度の合成について論じていきたいと思います。

3.1　特殊相対性理論の 2 つの柱

相対性理論は 2 つの原理を出発点にしています。一つが「特殊相対性原理」、もう一つが「光速度不変の原理」です。この節では、この 2 つの原理について説明していきましょう。

3.1.1　特殊相対性原理

「特殊相対性原理」は、ニュートン力学における「ガリレイの相対性原理」を引き継いだものといえます。

ニュートンの運動の第 1 法則に挙げられる「慣性の法則」では、自由運動[*1]が等速直線運動として観測されるような系[*2]として、慣性系が存在することが仮定されています。

どこかに一つ慣性系が存在すれば、この慣性系に対して等速直線運動を行う系もまた、慣性系となります。現実には、まったくの自由運動も、等速直線運動も存在しないでしょう。しかしここで、物理学の出発点として、「力の働いていない状態という理想的な状況で運動が等速直線運動になる」という定義を行っているといえるでしょう。

ニュートンの運動方程式は、物体の質量やそこに働く力が系の運動状態によらず変わらないという仮定のもと、すべての慣性系で同様になりたちます[*3]。

このように古典力学における「ガリレイの相対性原理」は、物理法則がすべての慣性系において同じように書けることを要請します。また、ここではすべての慣性系において空間の座標系は相対的でありお互いに変換する方法が定められています。また、そこでの距離の測り方は「三平方の定理」が成立するふつうの平らな空間ということになっています[*4]。一方、時間はあらゆる慣性系において一様に同じ時刻を示すことが仮定されています。つまり時間については宇宙のどこでも唯一絶対のものが使えるということが前提となっているのです。

ところが、前章で見たように電磁気現象はガリレイの相対性原理では説明できません。とくに光の伝播速度が系によって変わらないということが問題になります。もし、距離の測り方や時間の進み方が系によらず変わらないならば、

[*1] ここでは、力がまったく働かない場合の運動を自由運動と呼びます。

[*2] 「系」とはある運動状態にある観測者のことを指します。通常は、系とそれを原点として持つ座標系をセットにして考えます。

[*3] このように、系（座標系）の間で変換を行っても法則や方程式が不変であることを、**共変性**といいます。

[*4] 円柱座標や極座標のように座標系の引き方が曲がっていることと、空間そのものが曲がっていることは別のことがらです。古典力学でも座標系を曲線座標に取ることは問題ありません。

速度は普通の合成則[*5]になるはずです。それは系によって光の速度が変わることを意味します。

アインシュタインは、これまでみてきたような運動する物体における電磁気学および光学に関する考察から、物理学の法則はすべての慣性系において同じように書けるということは議論の出発点とできるだろうと仮定しました[*6]。

その代わり、時間や空間に関してはこれまでの概念を改めなければならないということをアインシュタインは提起しました。異なる慣性系の間で時間や空間の見え方が異なるのならば、その間の関係を決めるための共通の基準となるものが必要になります。それを与えるものが次の「光速度不変の原理」になります。

3.1.2 光速度不変の原理

これまでの光速度に関する議論やローレンツの電子論は、光や電磁気現象の相対性を再現するようなさまざまな仕組みを考え出すことに向けられてきました。しかし、アインシュタインはそれをひっくり返して、光の速度がいかなる慣性系から測定しても同じになることを議論の出発点におきました。いいかえれば、力学や電磁場の方程式によることなしに、時間・空間の性質を問題にしたのです。ここに、相対論の革新性と普遍性があるといえるのではないでしょうか。ここでは光の本性といったことも不問です。とにかく、光[*7]というものが存在し、それがある一定の速度で空間を伝わっていき、いつでもどこでも測定することは少なくとも可能であるということだけが仮定されているのです。

以上の 2 つのことがらを用いて、これから 2 つの慣性系における空間と時間の見え方を結びつける方法を考えていくことにします。そのためには、まず時間について考えることからはじめます。

3.2 「同時刻」をどう決めるか

いま、ある基準となるものさしを使って長さを測ることと、時間を正確に測ることはできるとしましょう。いま物理法則などは一切用いずに離れた 2 点にある 2 つの時計を合わせることを考えます。いま唯一確定しているのは光の速さなので、これを用いて 2 つの時計が「同期」していることを次のように定義します。

2 つの離れた点をそれぞれ A と B とよぶことにします。いま、ある時刻 t_A に点 A を出発した光が、時刻 t_B に点 B に到達して反射され、時刻 t'_A に点 A へ戻ってきたとします。ここで下添字の A と B は、それぞれの場所に置かれた時計で測った時刻という意味で使っています。このとき、往路と復路でそれぞれかかる時間は同じになるはずなので、

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

ならば、2 点の時計は同じ時刻を刻んでいる、すなわち「同期」されていると考えていいでしょう。このとき、光速度 c は、

$$c = \frac{2AB}{t'_A - t_A} \tag{3.1}$$

で与えられます。

もし、これが運動する 2 点ならば、行きは点 B が逃げていくために時間が多くかかり、帰りは逆に点 B がむかってくるために時間が短くなります。そのため、静止しているときに同期されている時計は、運動していると同期されなくなります。これを「同時の相対性」といいます。

これによって、系の運動状態によって、時間の進み方や 2 点間の距離といったことものが変わってくることになります。

次節では、運動する観測者から見た長さや時間がどうなるか、具体的に考えていくことにしましょう。

[*5] ベクトルの引き算で計算できるという意味です。

[*6] ただし、その物理法則の内容がこれまでのものと同じかどうかは別問題です。これについては後の章で論じます。

[*7] もっといえば、光である必要性もありません。光と同じ速度で伝わる何かであればいいのです。

3.3　空間と時間の相対性

3.3.1　時空の概念

歴史的には前後してしまいますが、相対論のおいて重要な概念として「時空」があります。これはただ単に時間と空間をセットにして４次元にしただけではありません。以下で見るように、系の運動によって時間座標と空間座標が混じる変換が必要になるのです。それまでの時間は、粒子の運動を曲線で表すためのパラメーターでした。しかし、相対論では時間と空間を別々に考えることはできません。このことをはっきりと示したのは数学者のミンコフスキーでしたので、これをミンコフスキー時空と呼びます。時空を図示する場合、横軸に空間座標、縦軸に時間座標を取り、未来への運動を上へ向かう線として表すのが通例です。これを「時空図」と呼びます。また、時空上の１点はある時刻のある場所での出来事を表します。その意味でこれを「事象」と呼びます。そして、ひとつの粒子の軌跡など、ある一連の事象をつないだ時空図上の線を「世界線」と呼びます。光の速さは非常に速いので時空図を書くときには通例 $c = 1$ とおき、斜め 45 度の直線が光の世界線になるようにします。

以下、この節では、運動する系からみたときに「同時」と認識される点が時空図上のどのような線になるのか、考えてみることにします。

3.3.2　時間の相対性

まずは、運動する系において時計の「同期」がどのようになるか考えてみましょう。

いま、ある棒があり、その両端を点 A と点 B とします。静止系 S からみて、この棒は点 A から点 B の方向へ向かって速度 v で運動しているとしましょう。一方、これが止まって見える系を「棒の静止系」と呼ぶことにします。静止系 S から見ればこの系は運動しているので、運動系 K になります。「棒の静止系 K」で測った棒の長さを $2l$ とおきます。まず、参考のために静止系 S から見た時空図を示します。

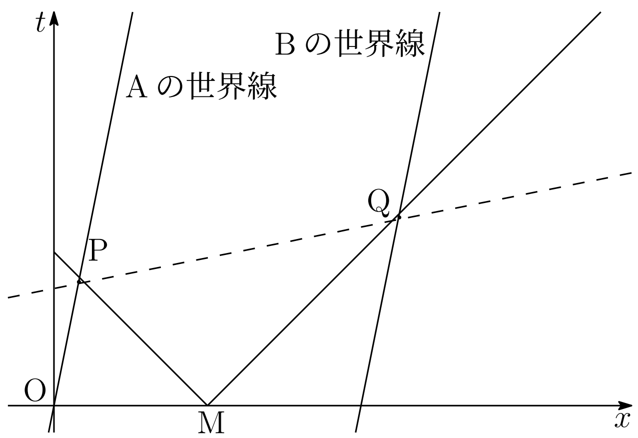

図 3.1　棒の両端の世界線と光が到達する点

この棒の両端に時計をおき、前節の方法で同期してあるとしよう。

いま棒の中点 M にライトを置き、時刻 $t = 0$ にそれが点灯したとします。棒の静止系 (つまりは運動系)K においてこれが同時に両端に到達し、時計を照らすことは明らかでしょう。

ではこれを静止系 S で観測するとどうなるでしょうか。

時刻 $t = 0$ に点 M を出発した光が端 B に到達したという事象について考えます。点 M から右斜め 45 度で引かれた線が光線を表します。これが B の世界線と交わる点 Q がもとめるべき事象です。この事象の時刻 t_B は、端 B が

遠ざかって運動しているため長くなり、

$$t_B = \frac{l}{c-v} \tag{3.2}$$

となります。したがってこの事象の座標 x_B は、速度 v でこの時間だけ動くわけですから、

$$x_B = 2l + \frac{lv}{c-v} \tag{3.3}$$

になります。

一方、光が点 A に到達したという事象 P については、端 A が光に向かって運動しているために短くなり、

$$t_A = \frac{l}{c+v}$$

になります。このときの端 A の座標 x_A は

$$x_A = \frac{lv}{c+v} \tag{3.4}$$

となります。あきらかに $t_A \neq t_B$ ですから、系 K で「同時」と認識された事象は、系 S では同時と認識されないことになります。

系 S では時間座標軸が縦に設定してあるので、「同時刻」をつないだ線は x 軸に平行な横の線ということになります。

では、系 K での「同時刻」をつないだ線は系 S の時空図上のどのような線になるのでしょうか？もし、時刻 $t=0$ 以降もライトが光を出し続けているならば、両端に最初の光が到達した時刻には、光は時空図上この 2 つの事象を結ぶ直線 PQ 上 (図中では点線で示した) を照らすことになるでしょう。つまり、この点線が「同時刻」の線になります。

この直線の傾きは、

$$t_B - t_A = \frac{l}{c-v} - \frac{l}{c+v} = \frac{2vl}{c^2-v^2}$$

と、

$$x_B - x_A = 2l + \frac{lv}{c-v} - \frac{l}{c+v} = \frac{2c^2 l}{c^2-v^2}$$

から、

$$\frac{t_B - t_A}{x_B - x_A} = \frac{v}{c^2} \tag{3.5}$$

となります。すなわち、直線 $t - \frac{v}{c^2}x = \text{一定}$ の上の点が「同時」ということになります。

このように、系（観測者）の運動状態によって同時の意味が変わってしまいます。これを**同時の相対性**といいます[*8]。

3.3.3　空間の相対性–ローレンツ短縮

次に長さについて考えてみましょう。

ある長さ l の棒 AB があって、静止系 S からみると端 A から端 B の向きへ速度 v で運動しているとします。静止系 S の原点に棒の端 A が来た時刻を $t=0$ にとります。一方、端 A に乗って棒とともに運動する観測者を系 K とします。この観測者の時計も静止系 S の原点と重なったときに $\tau = 0$ とリセットします。

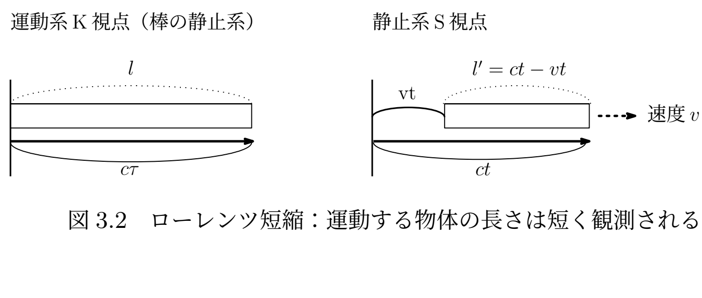

図 3.2　ローレンツ短縮：運動する物体の長さは短く観測される

[*8] 実際は時計の進み方も変わりますが、それは次節で説明します。

いま時刻 $t=0$ に原点を出発した光が t 秒後にこの棒の端 B に到達したと観測されたとしましょう。そのとき、棒の端 B の位置 x は

$$x = ct \tag{3.6}$$

と表すことができます。棒の端 A は速度 v で動いていますからその位置は vt です。したがって、静止系 S から見た棒の長さ l' は、

$$l' = x - vt = ct - vt = (c-v)t \tag{3.7}$$

と表されるでしょう。

一方、運動系 K から見たとき、観測される端の位置を ξ とします。棒は系 K から見ると静止していますから、これが長さ l になります。この系 K で測った光の到達時刻を τ とすれば、このときも光速度不変の原理より

$$\xi = c\tau \tag{3.8}$$

が成り立ちます。ガリレイ流に $\xi = x - vt$ としたのでは当然矛盾が生じますので、長さの単位が変化して、

$$\xi = \gamma(x - vt) \tag{3.9}$$

という因子がかかると仮定しましょう。この因子を以下で求めてみます[*9]。

いま、式（3.6）より $x = ct$ ですから、これを（3.9）に代入して、

$$\xi = \gamma(ct - vt) = \gamma(c-v)t \tag{3.10}$$

です。したがって、

$$c\tau = \gamma(c-v)t \tag{3.11}$$

となります。

相対性原理により、すべての慣性系は同等です。そうすると、これを逆に系 K でみた座標を系 S と比べることを考えれば、

$$ct = \gamma(c+v)\tau \tag{3.12}$$

となることが同様の議論により分かります。つまり、逆変換をしたときに元に戻らなければならないわけですが、逆変換というのは速度の向きを逆にした変換なので v の符号が逆になるのです。

よって、式 (3.11) および (3.12) の辺どうしをかけることによって、

$$c^2 t\tau = \gamma^2(c+v)(c-v)t\tau$$

になりますから、これから時間の変数を消去してまとめると、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.13}$$

となります。

こうして、長さも観測者の運動状態によって変化することになります。これを**長さの相対性**といいます。

棒の静止系（系 K）でみた棒の長さが l ならば、これが ξ にあたりますから、これを静止系 S でみたときの長さ $(x-vt)$ は $\frac{l}{\gamma}$ となり、棒の長さは

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.14}$$

倍になり、短く観測されることになります。これはまさにローレンツが電子論のなかで見出した「ローレンツ短縮」にほかなりません。ただし、その導出過程がまったくちがうのです。ここまでの議論で、電磁気学はおろか力学すらも使っていません。単に運動学的な考察のみから導き出しているのです。

このように、静止系 S と運動系 K では、時刻も長さも異なることになります。これを「時間と空間の相対性」と呼びます。これが相対論とそれ以前のニュートン力学とで大きく異なる点です。次節では、この静止系 S と運動系 K の間の座標と時間をどのように結びつければよいのかを与える、ローレンツ変換の導出について考えていくことにしましょう。

[*9] ここでは単純にもとの長さに比例するとしました。もし 2 次以上の項があるならば、慣性系どうしの関係の整合がつかなくなります。詳しくは次節のローレンツ変換のところで説明します。

3.4 ローレンツ変換の導出

いま 2 つの慣性系系 S と K があり、系 S に座標系 s が、系 K に座標系 k が張られているとします。また、それぞれの空間座標は互いに直行し、座標系 s の座標軸 x, y, z と座標系 k の座標軸 ξ, η, ζ はそれぞれ平行になっているとしましょう。この段階で 2 つの系におけるものさしと時計は同じものを使っているとします。

いま、静止系 S からみて系 K が x 軸方向に速度 v で運動しているように速度を与えます。系 K に固定されたものさしと時計は、系 K とともに運動します。系 K ではもう一度時計を同期させた上で、系 S における時計の読みが時刻 t のときの、系 K の時計の読みを τ とします。上の考察からこの τ は x, y, z, t と速度 v で決まると思われます。このときの、座標と時間の組 (x, y, z, t) と (ξ, η, ζ, τ) の間の変換式を求めるのがこの節の目標です。

まず、この座標変換は 1 次変換と仮定してよいでしょう。たとえば 2 次の項がある場合、2 つの変換の合成は 4 次の項をもってしまいます。慣性系 K に対して等速直線運動する別の慣性系 K' があったとき、これも慣性系ですから系 S に対しても等速直線運動しているはずです。そのとき、系 S から系 K' へ直接変換する変換式が存在します。これは 2 次の項を持つ変換式のはずですが、系 K を経由した変換の合成を使うと 4 次の項をもつことになり矛盾します。したがって、この座標変換は速度 v で決まる行列によって変換されるはずです。

この変換はどのような条件を満たすべきでしょうか？

光速度不変の原理を式で表すならば、次のようになります。

系 S において、原点を時刻 $t = 0$ に出発した光の波面の座標は

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{3.15}$$

を満たします。

一方、系 K と系 S との原点が時刻 $t = 0$ で一致していたとすれば、系 K からみた波面の座標は

$$(c\tau)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \tag{3.16}$$

を満たします。光速度は不変ですから、同じ c を使います。

ここから数学的に計算していけばローレンツ変換に行き着くことはできます。しかし、ここではそうせずに、物理的な考察からもう少し変換の形を絞ることにしましょう。

まず運動とは関係ない方向、y, z(およびη, ζ) 方向について考えましょう。もともと運動方向への光の伝播が問題だったわけですから、運動方向ではない座標軸については変換を受けないと考えるべきです。ですから、η 軸と y 軸、ζ 軸と z 軸とはそれぞれ平行のままとすべきということになります。これによって、問題は残る 2 つの変数を変換すればいいということになります。

次に、位置の変換についてですが、原点が速度 v で動いているのですから、$x - vt = \text{一定}$ の線が座標一定の線になります。また、さきほどの議論より $t - \frac{v}{c^2}x = \text{一定}$ が同時刻をつなぐ線になります。そして、これに何らかの因子 $\gamma(v)$ によって時間・空間のスケールが変化することが考えられます。また、全体に同じ因子 $\Phi(v)$ がかかることも許されるでしょう。座標変換の式は以下のような形になることが予想されます。

$$21\xi = \Phi(v)\gamma(x - vt) \tag{3.17}$$

$$\eta = \Phi(v)y \tag{3.18}$$

$$\zeta = \Phi(v)z \tag{3.19}$$

$$\tau = \Phi(v)\gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \tag{3.20}$$

となります。ところが、もしローレンツ変換を速度 v で適用した後、もう一度速度 $-v$ の変換を行うともとに戻るはずです。そのためには $|\Phi(v)| = 1$ でなくてはなりません。さらにローレンツ変換が $v = 0$ の近傍で連続になるためには（つまり $v \to 0$ で恒等変換につながる）$\Phi(v) = 1$ でなければなりません。

もちろん γ は前節でもともめたのですが、もう一度空間・時間双方の因子として計算しなおします。まず式 (3.4)

に変換式を代入します。

$$\begin{aligned}(c\tau)^2-(\xi 2+\eta^2+\zeta^2)&=c^2\gamma^2(t-\frac{v}{c^2}x)^2-\left\{\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2\right\}\\&=\gamma^2\left\{(ct-\frac{v}{c}x)^2-(x-vt)^2\right\}-y^2-z^2\\&=\gamma^2\left\{(ct)^2-2ct\frac{v}{c}x+(\frac{v}{c}x)^2-(x^2-2xvt+v^2t^2)\right\}-y^2-z^2\\&=\gamma^2\left\{(ct)^2+(\frac{v}{c}x)^2-x^2-v^2t^2\right\}-y^2-z^2\\&=\gamma^2\left\{(c^2-v^2)t^2-(1-\frac{v^2}{c^2})x^2\right\}-y^2-z^2\\&=\gamma^2(1-\frac{v^2}{c^2})(c^2t^2-x^2)-y^2-z^2\end{aligned}$$

これが $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$ になるためには、

$$\gamma^2(1-\frac{v^2}{c^2})=1$$

であればよいでしょう。したがって、

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.21}$$

ということになります。

以上の議論より、

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x-vt) \tag{3.22}$$

$$\eta=y \tag{3.23}$$

$$\zeta=z \tag{3.24}$$

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t-\frac{v}{c^2}x) \tag{3.25}$$

となります。この導出過程において、光速度不変の原理と特殊相対性原理をあますところなく使っていることをよく確認しておきましょう。

また、これはあくまで「そう見える」のであって、実際にそのようになるのとは違うのではないかと疑問に思われる方もあるでしょう。しかし、その観測者がそのように観測する以上、それ以外の「本当の時間」などというものをどのように定めることができるでしょうか？これは「見かけ」や「錯覚」の問題ではないのです。実際に、ある一定時間で崩壊してしまう粒子も、速度が速くなると寿命が長くなることが観測されています。その粒子にとっては、遅れた時間そのものがまさに経験した時間にほかならないのです。

3.4.1 時間の遅れ

前節でローレンツ短縮について触れましたが、おなじ因子 γ が時間の変換にもかかっています。時間の進み方がどのように見えるかも考えて見ましょう。

同じ時計を 2 つ用意して、片方を静止系 S に、もう片方を運動系 K において比べてみましょう。最初、原点が重なっていてその瞬間に両方の時計をリセットしたとしましょう。静止系 S において t 秒が経過したとき、運動系 K の時計は何秒を指しているでしょうか？

このとき、系 K の時計は位置 $x=vt$ にあります。したがって、この事象の系 K での時刻 τ は、

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t-\frac{v}{c^2}vt)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(-\frac{v^2}{c^2})t=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}t \tag{3.26}$$

となります。係数は 1 より小さいですから、運動している時計をみると、静止系の時計よりも進みが遅いという結果になります。これを「時間の遅れ」といいます。

まとめ

さて、ようやく相対論の 2 つの原理と、もっとも重要な道具であるローレンツ変換が出揃いました。この文章の以下の部分では、基本的にこれらをどう使っていくのか、という話が展開されることになります。まずは、次章でローレンツ変換の数学的な性質をいくつか確認しておきたいと思います。

これまでの話をまとめておきましょう。特殊相対性理論は次の二つの原理を出発点とします。

1. 特殊相対性原理：あらゆる慣性系は同等であり、そこでの物理法則は変わらない。
2. 光速度不変の原理：どの慣性系からみても、光の速度は変わらない。

そして、これから次のことが帰結されました。

1. 同時の相対性：観測者の運動状態によって「同時」と認識される時刻は変化する。
2. ローレンツ短縮：運動している観測者からみると、「長さ」は短くなる。
3. 時間の遅れ：運動している観測者からみると、「時間」の進みは遅くなる。

また、静止系での座標 (x, y, z, t) と速度 v で運動する系での座標 (ξ, η, ζ, τ) の間にはローレンツ変換

$$
\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \\
\eta &= y \\
\zeta &= z \\
\tau &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t - \frac{v}{c^2}x)
\end{aligned}
$$

の関係が成立します。