

第4章

ローレンツ変換の数学的性質

この章では、ローレンツ変換の数学的性質をいくつか明らかにしておきます。

まずは相対論の土台となる「時空」概念について掘り下げます。ここでは、ローレンツ変換によって変換される時間と空間がどのような数学的な性質をもっているかを見ます。そして、変換によって不変な量として四元的距離を定義します。これは、相対論的な因果律、そして力学を構築する上での土台になるものです。

その後、ローレンツ変換の合成を調べることによって、その数学的性質、とくに群としての性質に着目して調べていきます。これは、今後の議論を進める上で重要な道具立てとなるとともに、さらに一般相対論や（相対論的）場の量子論に進む上でも役に立つでしょう。この章の内容は少々計算が多く読みにくいかもしれませんが、しかし、最初は計算の細部は気にせず結論部分だけ読んでいただいてもかまいません。

では、さっそく時空の性質からはじめましょう。

4.1 ミンコフスキー時空

前章のローレンツ変換を導出したところで、ひとつ大きなジャンプがありました。光速不変の原理からは $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$ のときに、これが保たれる関係で十分です。しかし、ローレンツ変換は $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ の値そのものを保存します。この値を

$$s^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (4.1)$$

と書いて、相対論的距離、あるいは四元的距離といいます^{*1}。これは、系によらない不変な量になります。

これは s^2 と表記していますが、普通のユークリッド空間と違い、これが非負となるとは限りません。むしろ、この距離の符号におおきな意味があります。

まず、 $s^2 = 0$ は、 $c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$ となる点ですから、これは光の世界線を表します。四元的距離は0になるので、「ヌル世界線」と呼ばれます。ヌルとは0とか無という意味になります。この線は $c = 1$ の時空図では45度の直線になります。これを境にして距離が正の領域と負の領域に分かれます。

距離が正の領域は、時空図で言えば時間軸を含む領域になります。ここは $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0$ 、すなわち、

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} < c^2$$

ということですから、原点からその点まで光速以下の速度で到達できることになります。具体的には、速度 \vec{v} を、

$$\vec{v} = \frac{1}{t}(x, y, z)$$

にとってローレンツ変換を行えば、時間軸上にその事象を乗せることができます。つまり、時間さえかければそのままいくことができるということです。そのため、この領域を「時間的領域」と呼びます。時間的領域にある事象は、原点と因果関係をもつことができます。また、この領域にある事象は、ローレンツ変換を行っても時間の符号が変わることはありません。つまり、この領域においては、過去と未来が入れ替わることはないのです。また、2つの事象の時間的順序も変わることもありません。

^{*1} 本によってはこれと逆の符号で定義しているものもあるので注意してください。

一方、距離が負の領域は、時空図で言えば空間軸を含む領域になります。ここは $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) < 0$ 、すなわち、

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} > c^2$$

ということですから、光速度をもってしてもその事象まで原点からはたどりつけないことになります。また、この領域にある事象は、ローレンツ変換をおこなうと時間座標の符号が変化しえます。とくに、適当なローレンツ変換を行えば時間座標を 0 にすることができます。つまり、この領域にある事象と原点とを同時と認識するような慣性系が存在します。つまり同時刻にことなる空間座標にあるのですから、因果関係を結ぶことはできないのです。このため、空間的に隔離されている事象という意味で、「空間的領域」と呼ばれます。

この区分はもちろん、ローレンツ変換によっても変わりません。

また、この式の形から明らかのように、空間の長さを変えない変換、たとえば回転などを行っても四元距離は変わりません。よって、ローレンツ変換と空間回転の合成は、四元距離を変えない変換になります。

これからの議論を進める上で、時間と空間座標の次元がことなるままではいろいろと式が複雑になってしまいます。そこで、つぎのような四元座標を導入します。

$$\begin{cases} x_0 = ct \\ x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases} \quad (4.2)$$

とおきます。

この表記を用いると、ローレンツ変換は次のように表すことができます。

$$\begin{cases} x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \quad (4.3)$$

ここで、無次元化した速度として、

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (4.4)$$

とおきました。以下はこの記号を用いることにします。

4.2 同じ方向のローレンツ変換の合成—速度の合成則

次に、同じ方向へのローレンツ変換を合成した場合、これが 1 つのローレンツ変換として表されるか調べてみましょう。

以下では、簡単のために $\{x_0, x_1\}$ の組だけを考えます。1 方向のローレンツ変換では他の方向に影響を与えないのでどうしても問題ありません。

速度 β でのローレンツ変換を表す行列を $\Lambda(\beta)$ とかくことにします。

以上の記号を使うならば、これからやりたいことをまとめると、

$$\Lambda(\beta) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

としたときに、 $\Lambda(\beta_2)\Lambda(\beta_1) = \Lambda(\beta)$ となるような β を見つけることができるか、ということになります。

実際に計算してみましょう。

$$\Lambda(\beta_2)\Lambda(\beta_1) = \gamma_1\gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$= \gamma_1\gamma_2 \begin{pmatrix} 1 + \beta_1\beta_2 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ -(\beta_1 + \beta_2) & 1 + \beta_1\beta_2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$= \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \\ -\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

最後の式変形では、ローレンツ変換の一般形に合わせて対角部分を 1 に合わせました。まずは行列の係数部分について計算をしてみましょう。

$$\frac{1}{\gamma_1\gamma_2} = (1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2) \quad (4.9)$$

$$= 1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 \quad (4.10)$$

$$= (1 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2) - (\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2) \quad (4.11)$$

$$= (1 + \beta_1\beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2 \quad (4.12)$$

よって、

$$\gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) = \frac{1 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{(1 + \beta_1\beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2}} \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}\right)^2}} \quad (4.14)$$

となり、行列の中の式とも整合がつかしました。したがって、

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \quad (4.15)$$

となることが分かりました。これが相対論における「速度の合成則」になります。

この式の意味を少し検討しておきましょう。まず、速度が単純な和になっていません。これは、「時間の遅れ」の効果によって、運動する慣性系の時計は静止系からみるとゆっくり進んで見えますから、慣性系から見た速度よりも静止系でみた速度の方が小さく見える、と説明できるでしょう。また、 β_1, β_2 のどちらかが 1、つまり光速のとき、合成された速度も 1 つまり光速になります。これは、どんな慣性系からみても、光速度をもつものは等しく光速で運動するように見える、という「光速度不変の原理」を再現しています。ただし、光速度をもつ「慣性系」というのは存在できません。そのことは後の力学との関連でもう一度触れることにします。

4.3 群としてのローレンツ変換

以下の議論に先立って、四元距離を保存するような変換を分類しておきます。

まずは、時間を含まない、純粋な空間回転が考えられます。これには 2 種類あって、座標軸の反転を含まないものと、含むものが存在します。その見分けは行列式の正負で行います。また、時間を含む変換はローレンツ変換で、時間成分の正負によって、時間反転を含まないものと含むものになります。これについては付録でまとめるので、以下の議論では行列式が正で、時間反転も含まないもののみを考えることにします。相対論では、純粋なローレンツ変換を「ブースト」と呼びます。

さて、四元距離を変えないような変換全体の集合を考えます。これはその定義からいって、2 つの変換を合成したのもまた、その集合に含まれていることは明らかです。回転の合成は回転になりますし、同じ方向へのブーストの合成が 1 つのブーストで表されることは前節で見たとおりです。

では、一般にローレンツ変換の合成が、ひとつのローレンツ変換で表されるのでしょうか。これがこの章のテーマなのですが、実際にはこうはできません。表されないことは以下のように比較的簡単に分かります。

x 方向と y 方向のブーストを合成してみます。

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\gamma_1\gamma_2\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\beta_2 & \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

この計算から分かるように、ローレンツ変換は対称行列ですが、その積は対称になっていません。つまり、ローレンツ変換の積を1つのローレンツ変換で表すことはできないのです。では、どうなるのか、というのが残りの部分で明らかにしたいことですが、その前に一般の方向のローレンツ変換の式を導出しておきます。

4.4 一般の方向へのローレンツ変換

この節では、一般の速度ベクトル $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ でのブーストを表す変換式を求めておきたいと思います。

いくつかの方法があると思いますが、ローレンツ変換が速度の方向にのみ影響を与えることをうまく使う方法でやってみます。

空間のベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ を速度ベクトル $\vec{\beta}$ の方向へと分解し、平行成分 \vec{x}_{\parallel} と垂直成分 \vec{x}_{\perp} に分けます。この分解は、

$$\vec{x}_{\parallel} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2} \vec{\beta} \quad (4.17)$$

と、

$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} = \vec{x} - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2} \vec{\beta} \quad (4.18)$$

とかけます。したがって、これにローレンツ変換をほどこせば、ベクトルでの表現は得られます。つまり、

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \quad (4.19)$$

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta}x_0) \quad (4.20)$$

$$\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \quad (4.21)$$

とかけます*2。

これで式としてはできあがっているわけですが、これから合成などを考えていきたいので行列で表現しておきましょう。

まず、平行成分 \vec{x}_{\parallel} を取り出す行列を作りましょう。式を簡略化するために $\hat{\beta} = \frac{\vec{\beta}}{\beta}$ 、つまり速度方向への単位ベクトルを使います。

$$\vec{x}_{\parallel} = \frac{x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3}{\beta} \frac{\vec{\beta}}{\beta} \quad (4.22)$$

ですから、これを再現する行列は、

$$\begin{pmatrix} x_{\parallel 1} \\ x_{\parallel 2} \\ x_{\parallel 3} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1\hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2\hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_3\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_2\hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_3\hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1\hat{\beta}_3 & \hat{\beta}_2\hat{\beta}_3 & \hat{\beta}_3\hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

となるでしょう。したがって、垂直成分は、

$$\begin{pmatrix} x_{\perp 1} \\ x_{\perp 2} \\ x_{\perp 3} \end{pmatrix} = (E - P) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\beta}_1\hat{\beta}_1 & -\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1 & -\hat{\beta}_3\hat{\beta}_1 \\ -\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 & 1 - \hat{\beta}_2\hat{\beta}_2 & -\hat{\beta}_3\hat{\beta}_2 \\ -\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3 & -\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3 & 1 - \hat{\beta}_3\hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

と表されます。ここで E は3次元の単位行列です。

*2 1行目の式は、内積の性質より、 $\vec{\beta} \cdot \vec{x} = \vec{\beta} \cdot \vec{x}_{\parallel}$ です

よってこれを用いてベクトルでの表現を行列で書き直すと、

$$\begin{aligned} \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_1 & -\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1 & -\hat{\beta}_3 \hat{\beta}_1 \\ 0 & -\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 & 1 - \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_2 & -\hat{\beta}_3 \hat{\beta}_2 \\ 0 & -\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_3 & -\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3 & 1 - \hat{\beta}_3 \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_3 \hat{\beta}_1 \\ -\beta_2 & \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_2 & \hat{\beta}_3 \hat{\beta}_2 \\ -\beta_3 & \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_3 & \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3 & \hat{\beta}_3 \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + (\gamma-1)\hat{\beta}_1\hat{\beta}_1 & (\gamma-1)\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1 & (\gamma-1)\hat{\beta}_3\hat{\beta}_1 \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 & 1 + (\gamma-1)\hat{\beta}_2\hat{\beta}_2 & (\gamma-1)\hat{\beta}_3\hat{\beta}_2 \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma-1)\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3 & (\gamma-1)\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3 & 1 + (\gamma-1)\hat{\beta}_3\hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.25)$$

これが、一般の方向へのローレンツ変換を表す行列になります。

式の形は複雑ですが、導出の過程とベクトルでの表現をセットで覚えておけば、その意味は明らかだと思います。行列での表現をみれば、これが対称行列になっていることも明らかでしょう。

4.5 異なる方向へのローレンツ変換の合成

さて、いよいよ異なる方向へのローレンツ変換の合成について調べる段階にきました。

いま、 $\vec{\beta}_1 = (\beta_1, 0, 0)$ 、 $\vec{\beta}_2 = (0, \beta_2, 0)$ として、この二つの方向へのローレンツ変換の合成 $\Lambda_y(\beta_2)\Lambda_x(\beta_1)$ を考えます。

まず、気をつけなくてはならないことは、この合成された速度が $(\beta_1, \beta_2, 0)$ ではない、ということです。以下の議論では、最初の慣性系を K 系、そこから $\Lambda_x(\beta_1)$ で移った慣性系を K' 系、さらにそこから $\Lambda_y(\beta_2)$ で移った慣性系を K'' 系と呼ぶことにしましょう。 $\Lambda_y(\beta_2)$ はあくまで K' 系に作用しますので、このベクトル $\vec{\beta}_2$ も K' 系で観測したのになります。したがって、これをもとの K 系で観測したものは、ローレンツ変換で戻したのになります。すると、 y 軸方向は変化ありませんが、時間の進み方が γ_1 倍になります。ということは、この速さは $\frac{\beta_2}{\gamma_1}$ になります。よって、元の K 系からみた $\vec{\beta}_2$ は、

$$\vec{\beta} = \left(\beta_1, \frac{\beta_2}{\gamma_1}, 0 \right) \quad (4.26)$$

というベクトルになることが分かります*3。

ここで、 γ_1 、 γ_2 と γ がどのような関係にあるか補助的な計算をしておきます。

$$\begin{aligned} 1 - \beta^2 &= 1 - \left(\beta_1^2 + \frac{\beta_2^2}{\gamma_1^2} \right) = 1 - \{ \beta_1^2 + (1 - \beta_1^2)\beta_2^2 \} \\ &= 1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 \\ &= (1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2) \end{aligned}$$

よって、

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2 \quad (4.27)$$

という簡単な関係が成り立ちます。

この結果を用いて、 K 系からみたベクトル $\vec{\beta}$ でのローレンツ変換は、前節の結果といまの関係を用いて、

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + (\gamma-1)\hat{\beta}_1\hat{\beta}_1 & (\gamma-1)\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & (\gamma-1)\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 & 1 + (\gamma-1)\hat{\beta}_2\hat{\beta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

ただし、ここで

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{\beta\gamma_1}$$

です。

*3 これを見落とすと以下の計算でハマります。というか、ハマりました・・・

ところが、ローレンツ変換を合成したものは、次のような行列になるのです。

$$\Lambda_y(\beta_2)\Lambda_x(\beta_1) = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\gamma_1\gamma_2\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\beta_2 & \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

この式 (4.29) と式 (4.5) を比べてみると、 z 軸部分は等しいので変えなくてもいいでしょう。そうすると、 z 軸まわりの回転を行うと一致させられるかもしれません。そこで、 z 軸まわりの回転を表す行列を $R_z(\theta)$ と書けば、

$$\Lambda_y(\beta_2)\Lambda_x(\beta_1) = R_z(\theta)\Lambda(\vec{\beta}) \quad (4.30)$$

となるような角度 θ をうまく作れるか、ということになります。このままだと少し計算が大変なので、移項して、

$$R_z(-\theta)\Lambda_y(\beta_2)\Lambda_x(\beta_1) = \Lambda(\vec{\beta}) \quad (4.31)$$

の形にしてみます。左辺を実際に計算して見ましょう。

$$R_z(-\theta)\Lambda_y(\beta_2)\Lambda_x(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\gamma_1\gamma_2\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\beta_2 & \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\gamma_1\gamma_2\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1\cos\theta - \gamma_1\gamma_2\beta_2\sin\theta & \gamma_1\cos\theta + \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2\sin\theta & -\gamma_2\sin\theta & 0 \\ -\gamma_1\beta_1\sin\theta - \gamma_1\gamma_2\beta_2\cos\theta & -\gamma_1\sin\theta + \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2\cos\theta & -\gamma_2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

これを式 (4.5) と比較して θ を決めましょう。そのときに、

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$$

という変形を何回かつかいます。

一番簡単なところから攻めましょう。行列の (2, 1) 成分*4 を使います。ここは、

$$\gamma_2\sin\theta = (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2}\frac{1}{\gamma_1} \quad (4.34)$$

となっていますから、 $\sin\theta$ を決めることができます。この計算はちょっと面倒くさいですが (確認ですが $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ です)、

$$\sin\theta = \frac{1}{\gamma_1\gamma_2}(\gamma - 1)\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}\beta_1\beta_2 \quad (4.35)$$

$$= \frac{\gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2 + 1} \quad (4.36)$$

です。一方、(2, 2) 成分を比較して、

$$\gamma_2\cos\theta = 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2}\frac{1}{\gamma_1^2} \quad (4.37)$$

$$= 1 + (\gamma - 1)\frac{\gamma_2^2 - 1}{\gamma_2^2}\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}\frac{1}{\gamma_1^2} \quad (4.38)$$

$$= 1 + \frac{\gamma_2^2 - 1}{\gamma + 1} \quad (4.39)$$

$$= \frac{\gamma + 1 + \gamma_2^2 - 1}{\gamma - 1} \quad (4.40)$$

$$= \frac{\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2}{\gamma + 1} \quad (4.41)$$

*4 成分の添字は 0 から始まります。したがって (2,1) 成分は左から 3 番目、上から 2 番目の成分を指します。

よって、

$$\cos \theta = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1} \quad (4.42)$$

となります。

あとは、これがほかの成分とも矛盾しないか確かめる必要がありますが、長くて面倒な計算が続くので省略します。付録で計算をつけますので興味のある方はそちらをご確認ください。結論から言うと、これですべての成分が正しく変換されます。

以上の計算から、

$$\Lambda_y(\beta_2)\Lambda_x(\beta_1) = R_z(\theta)\Lambda(\vec{\beta})$$

のように、ローレンツ変換の合成は、ローレンツ変換だけでは表せず回転も含んだ形になるということ分かりました。つまり、ローレンツ変換はそれだけでは閉じた群をつくらず、ローレンツ変換と回転とを併せて群をつくるのです。ということは、異なる方向へのローレンツ変換を合成すると、古典力学ではありえなかった回転が生じることとなります。これがスピンを説明するひとつの方法へとつながるのですが、これは別の章で扱うことにします。

4.6 異なる方向の速度の合成

この章の最後に、異なる方向の速度の合成について考えましょう。これにもいくつかの方法がありますが、ここではいままでとは違った見方もあるということで、微分を使った方法で考えてみます。これは、特殊相対論で加速度のある場合を扱うときなどにもつながります*5。いま、ある慣性系 S からみた粒子の座標が $x_1(x_0), x_2(x_0), x_3(x_0)$ と時間の関数になっているとしましょう。そこでの速度は、それぞれの微分であって、

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{dx_1}{dx_0} \\ \beta_2 = \frac{dx_2}{dx_0} \\ \beta_3 = \frac{dx_3}{dx_0} \end{cases} \quad (4.43)$$

と表せます。これを x_1 軸方向に速度 β で等速直線運動する慣性系 K からみるとどうなるか計算してみましょう。ローレンツ変換は、

$$x'_1(x'_0) = \gamma(x_1(x_0) - \beta x_0) \quad (4.44)$$

$$x'_2(x'_0) = x_2(x_0) \quad (4.45)$$

$$x'_3(x'_0) = x_3(x_0) \quad (4.46)$$

となります。これを x'_0 で微分すればよいわけですが、右辺が x_0 の関数なので変数変換をしなければなりません。この場合、ローレンツ変換の逆変換を求めて微分します*6。逆変換は速度の符号を変えたものになるので、時間部分だけ書けば、

$$x_0 = \gamma(x'_0 + \beta x'_1) \quad (4.47)$$

よって、合成関数の導関数を計算するのに必要なものは、

$$\frac{dx_0}{dx'_0} = \gamma(1 + \beta\beta'_1) \quad (4.48)$$

です。

さて、これから計算したいのは速度の合成です。ですから、運動している慣性系 K からみた速度 $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ が静止系 S からどう見えるか、ということになります。式 (4.44) を x'_0 で微分して、

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= \frac{x'_1}{x'_0} = \gamma \left(\frac{dx_1}{dx_0} - \beta \right) \frac{dx_0}{dx'_0} \\ &= \gamma \left(\frac{dx_1}{dx_0} - \beta \right) \gamma (1 + \beta\beta'_1) \\ &= \gamma^2 (\beta_1 - \beta) (1 + \beta\beta'_1) \end{aligned} \quad (4.49)$$

*5 といっても、数学的には単に合成関数の導関数を使っているだけです。

*6 変数変換が行列で書かれている場合は、逆行列を使わなければならないことに注意しましょう。

これを β_1 について解いてやると、

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\beta'_1}{\gamma^2(1 + \beta\beta'_1)} + \beta \\ &= \frac{\beta'_1(1 - \beta^2)}{1 + \beta\beta'_1} + \beta \\ &= \frac{\beta'_1 + \beta}{1 + \beta\beta'_1}\end{aligned}\tag{4.50}$$

これは式 (4.15) と同じ式です。

一方、式 (4.45) を微分すれば、

$$\begin{aligned}\beta'_2 &= \frac{x'_2}{x'_0} = \frac{x_2}{x_0} \frac{x_0}{x'_0} \\ &= \beta_2 \gamma(1 + \beta\beta'_1)\end{aligned}\tag{4.51}$$

したがって、

$$\beta_2 = \frac{\beta'_2}{\gamma(1 + \beta\beta'_1)}\tag{4.52}$$

となります。これは $\beta'_1 = 0$ とおけば、式 (4.26) と同じになります。

まとめ

一般のローレンツ変換は、時空の「四元距離」

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

を変えない変換として定義されます。このような距離が定義された時空をミンコフスキー時空と呼びます。この四元距離が、正・0・負の場合に対応して、時間的領域・ヌル測地線・空間的領域に分けられます。

同じ方向へのローレンツ変換は、1つのローレンツ変換で表すことができ、そこから速度の合成則が導かれました。

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

また、異なる方向へのローレンツ変換を合成した場合、ローレンツ変換だけではなく、

$$\Lambda(\vec{\beta}_2)\Lambda_x(\vec{\beta}_1) = R_z(\theta)\Lambda(\vec{\beta})$$

のように回転を含めないと表現できません。

こうして、四元距離を変えない変換は、ローレンツ変換と回転を併せた全体として群を作ることがわかりました。