第 6 章

相対論的力学

この章から、いよいよ相対論を取り入れた力学について考えていきます。相対論では速度の合成がいままでとは違っていました。ということは、加速度についても変換が適用されることになります。これまでの運動学は「光速度不変の原理」を出発点として、時空の変換について考えてきました。これからは第 2 の原理、「相対性原理」を満たすような力学の法則を考えていきます。

そこで「相対性原理」を満たす力学を表現する数学的手段として、まずはテンソルについてみていきます。その上で、ある慣性系における力学法則 $F = ma$ が、別の慣性系からみてどうなるかを考えることによって慣性系によらない形の法則を考えます。その結果として、エネルギーと運動量がひとつの量にまとまることが結論されます。

6.1　力学の法則をどう表現するか

相対論の柱のひとつ、「光速度不変の原理」を満たすために観測者の運動によって時間・空間の見え方が変化することと、そこからの帰結をみてきました。

ここではもうひとつの柱である「相対性原理」について考えていきます。これは「いかなる慣性系であっても物理法則は変わらない」というものでした。しかしこれまでの議論で、座標や速度、あるいは波数といったものまでも、ローレンツ変換を受けて変化してしまいます。それでも「法則」が変化しないようにするには、どうすればよいでしょうか？

それは、**方程式のすべての要素が同じように変換すればよい**、のです。そういった要請を簡単に満たすための道具立てをするのが、この節の目的です。

まずは、慣性系をかえても不変なもの、つまりスカラーがあります。もっとも重要なスカラーは固有時 τ でしょう。これは運動する粒子に張り付いた時計の示す時刻であり、その定義上いかなる慣性系から見ても変わらないはずです。また、以前に出てきた位相のように 2 つの四元ベクトルの内積で表される量もスカラーになります。

ローレンツ変換を表す行列を Λ と書いて、位置の変換を次のように書き表します。

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{6.1}$$

添字の上と下には意味があるのですが、それは後述します。まずは、ここで新しいルールを導入します。添字の上と下に同じ文字が書いてある場合、それは添字の 0〜3 にわたって和を取る、というものです[*1]。これはアインシュタインの規約と呼ばれるもので、たくさん出てくる和を省略してしまおうというものです。ですから、上の式を実際に計算するときは、

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

という計算をすることになります。

次に、内積を定義しておきましょう。四元ベクトルを、空間ベクトルと時間成分とに分けて書く表現を定義しておきましょう。$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ として、四元ベクトルを $a^{\mu} = (a_0, \vec{a})$ と書きます。

[*1] ギリシア文字ではなく、アルファベットの場合は 1〜3、つまり空間成分だけの和を取る、というルールもあります。

ここで、内積を書くために行列 η を定義しておきましょう。

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

です。これを使えば内積は

$$xy = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{6.3}$$

と書くことができます。このとき、ν の和を先にとって、

$$y_\mu = \eta_{\mu\nu} y^\nu = (y_0, -\vec{y}) \tag{6.4}$$

と書いておきます。このとき、添字が上についているものを反変ベクトル、添字が下についているものを共変ベクトルといいます。この区別には詳しく言えば意味があるのですが、いまのところは計算上の記号だと思ってください。この記号を導入すると、内積は必ず反変ベクトルと共変ベクトルの積になっていなければなりません。共変ベクトルのローレンツ変換は、

$$y'^\mu = \Lambda_\mu{}^\nu y^\nu \tag{6.5}$$

です。この添字の上下が逆になったものがどういうものか考えましょう。内積はローレンツ変換で変化しません。したがって、

$$x'^\mu y'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\lambda y_\lambda \tag{6.6}$$
$$= \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\lambda x^\nu y_\lambda \tag{6.7}$$
$$= x^\mu y_\mu \tag{6.8}$$

になる必要があります[*2]。つまり、

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\lambda = \delta^\lambda_\nu \tag{6.9}$$

ということになります[*3]。つまり、$\Lambda_\mu{}^\nu$ は、$\Lambda^\mu{}_\nu$ の逆行列です[*4]。

次に、微小変化と微分について考えます。

まず、微小変化について考えましょう。これは単に座標の差ですから、元のベクトルと同じになります。つまり、dx^μ は反変ベクトルになります。

では、微分はどうなるでしょうか。微分の変換は、合成関数の導関数より、

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{6.10}$$

です。この微分の部分は、反変ベクトルの変換式を逆に解いて、

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu \tag{6.11}$$

より、微分の部分は、

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu \tag{6.12}$$

になります。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{6.13}$$

となって、微分は共変ベクトルとして変換します。このことが分かりやすくなるように相対論では、

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{6.14}$$

[*2] 和の規則によって消えてしまう添字については、実際なんでもいいことに注意しましょう。$x^\mu y_\mu$ と書いても $x^\nu y_\nu$ と書いても同じことです。

[*3] ここで δ の方は添字が上下重なっているのは、対称行列なので前後の位置関係に意味がないからです。

[*4] そのため、上と下が左右どちらについているかで意味が異なります。

という記号を使います。同様に、共変ベクトルによる微分は反変ベクトルになるので、

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{6.15}$$

ここまでは、スカラー（ローレンツ変換で不変なもの）とベクトル（ローレンツ変換によって変換するもの）でしたが、ほかにも行列として変換するものがあり、これらをまとめて「テンソル」と呼びます。たとえば、2 階の行列で表される量の場合、2 階のテンソルと呼ばれ、

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\lambda \Lambda_\nu{}^\rho T^{\lambda\rho}$$

のようにローレンツ変換 2 つによって変換されます。上の式の場合は反変成分が 2 つでしたが、共変でできているもの、反変と共変が混じっているものなども考えられます。具体的なテンソルは電磁気学のところで出てくる予定です。また、量子論との関係で出てきた「スピノール」というものもありますが、これについてはこの文章全体の最後の方で触れるかもしれません。

相対性原理を満たすような物理法則の条件は、法則の両辺が同じ変換性をもつこと、ということができるでしょう。このように、法則をローレンツ変換によって形が変わらないように書いたものを「共変形」といいます。

この章の残りの部分では、もっとも基本的な物理法則である運動方程式について検討します。

6.2 $F = ma$ の意味を検討する

運動方程式とは、力を $\vec{F}$、質量を m、加速度を $\vec{a}$ としたとき、

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{6.16}$$

という関係が成り立つという法則です。これを相対論に合うように書き換えるのがこの章の目的なのですが、問題点を挙げていきましょう。

まず右辺から考えます。これまでの力学では加速度は

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \tag{6.17}$$

と定義されます。これは時間という四元ベクトルの 1 成分で微分しているわけですから、これをそのまま四元ベクトルへ拡張するのは難しいでしょう。その変換も複雑になります。1 階微分である速度の変換を以前に計算しましたが、これも簡単な形ではありませんでした。加速度となると、さらに複雑になることが予想されます。これをローレンツ変換で不変な法則に書き換えるのは易しくはなさそうです。

そこで、ある慣性系において静止する物体にはたらく加速度が式 (6.17) で表されるとして、この加速度の形を保ったままローレンツ不変な法則へと書き換える方法を考えます。問題なのは微分が時間という四元ベクトルの 1 成分によって行われていることです。もっとも単純な方法は加速度の定義を時間ではなくスカラーである固有時での微分にして、

$$a^\mu = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} \tag{6.18}$$

というようにしてみましょう。これは確かに四元ベクトルになっています。ここでひとつ問題として出てくるのは、第 0 成分が何を意味するのか、ということでしょう。「四元速度ベクトル」u^μ として、

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \tag{6.19}$$

を考えます。これの第 0 成分は、

$$u^0 = \frac{\partial (ct)}{\partial \tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.20}$$

で、ローレンツ因子になります。したがって、加速度の第 0 成分は、

$$a^0 = \frac{\partial u^0}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{6.21}$$

となります。これは速度一定ならばもちろん 0 ですが、いまは加速度のある場合を考えているので 0 ではありません。その意味はまた後で考えることにしましょう。ここではまず、運動方程式の右辺に現れるものとして、「四元加速度」a^μ を考える方向で話を進めます。

6.3 質量はスカラーか？

続いて、右辺のもうひとつの要素である質量について考えましょう。

$F = ma$ の左辺と右辺が四元ベクトルになるならば、質量 m はスカラーであるか、あるいはテンソル $m^\mu{}_\nu$ のどちらかということになるでしょう。しかし、ここではテンソルである可能性は考えないことにします。なぜならば、テンソルであるとなれば 16 個の成分が必要になり、ニュートン力学には現れない 15 個の成分を考えるのは合理的とはいえないでしょう。

そもそも、質量とは物質の量、その存在の大きさを表す量です[*5]。運動方程式においては物質の動かしにくさ、すなわち「慣性」の大きさを表す量として出てきます。その慣性は運動状態によらないのか、という問題なのですが、これを今の段階ではっきりと示すことは難しいのです。その理由をいくつか説明しましょう[*6]。

実験的には相対論誕生より少し前、1900 年前後には運動する電子の質量の測定が行われました。カウフマンによる 1905 年の測定は「運動によって質量は変化しない」と結論されるようにみえました。しかし、プランクなどがその測定精度に問題があることを指摘し、後の 1908 年にブーヘラーが再実験を行って、ローレンツの電子論や相対論が予言する結果に近いことが確認されました[*7]。それは速度の増加とともに質量は増加することを示していたのです。そのため相対論の効果としても「質量の増大」として書かれることが多いわけですが、これは前節でみたような四元速度とニュートン的な速度の定義の違いとして説明されるものです。つまり、四元運動量ベクトルを

$$p^\mu = mu^\mu \tag{6.22}$$

で定義すると、これを書き換えてニュートン力学との比較が見えやすい形にすれば、

$$p^\mu = mu^\mu = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial x^\mu}{\partial t} \tag{6.23}$$

より、実質的に質量が速度の増大に伴って増えるようにみえるのです。したがって、運動方程式の中の係数としての m 自体は定数ということになります。その意味で「質量はスカラー」ということがいえるでしょう。

質量のような物理における基本的な概念のようなものこそ、現代物理学の基礎をつくる相対論のレベルできちんと論じたいところですが、なかなかそうはいきません。最近ヒッグス粒子が発見されて話題になりましたが、質量とは何か、その起源・仕組みはどういうものか、というのはまさに物理学の最前線にある課題とも言えるもので、まだその答えがはっきりと出てはいないのです。ですから、ここでは「運動方程式に現れる係数」としての質量を定義しておきます。

1. 質量は物体に固有な「物質の量」を表す
2. 質量は物体の「動かしにくさ」を表す指標である（つまり「慣性」の大きさ）
3. 質量はローレンツ変換で変化しない

として定義しておきます。つまり運動方程式が

$$F^\mu = ma^\mu$$

[*5] 私たちにとって質量は「重さ」として考えた方がより身近なことに思えるでしょう。これは物体にはたらく重力の大きさを測っていることになります。重力の大きさを決めるという意味での質量、すなわち「重力質量」は一般相対論の出発点でもある重要なものですが、ここではいったん脇においておきます。

[*6] 実を言うと、ランダウの教科書など多くの教科書が何の前提もなしに質量をスカラーにおいているのが気になって、なんとか物理的な考察から質量がスカラーであることを論証しようと考えました。しかし結局、質量は物理において「定義」されなければならない量であり、多かれ少なかれ天下り的な成分を含まざるを得ないというのが私の結論です。もっと考察が進んで考えが変われば、ここの記述は変わるかもしれません

[*7] とはいえ、この結果についても精度が十分でなくかなり後まで議論が続いたようです。

という形になっており、その係数 m を質量ということにします。ただし、私たちが通常の感覚で「質量」という場合、それは慣性の大きさや重力の大きさによって計測されます。この意味での質量は次章でみるように物体のエネルギーを反映して変化します。そういった区別をつけるために、ここで定義した係数としての m を「静止質量」、通常の意味で使う方を単に「質量」と呼び分けている時代もありました。これについては、最近批判的な記述をよく見かけますし、自分も「静止質量」というのを使うべきではないと思っていました。しかし、この 2 つの概念の区別は混乱を避けるためには便利な面も否定できないのではないでしょうか。単に「質量は変化しない」といってしまうと、現実に測定される質量が次章で扱う「質量欠損」を反映したものになることなどとの整合性がつかなくなります。

こういう議論が広がってきている背景には素粒子論があるのでしょう。現代の素粒子論において、物質を構成する最小の要素である素粒子の質量そのものはスカラーということになっています。素粒子はその質量で区別され、「対生成」という現象において必要な最低エネルギーなどが質量によって決まります。これは素粒子を記述するラグランジアンの係数として現れるものです[*8]。最近の物理学において話題になる「素粒子の質量」といえばこちらのことを指します。そういったことが単に「質量」といった場合、運動方程式の m を指すことにつながっているのではないでしょうか。

ただし、複数のクォークから成る陽子・中性子や中間子など、複数の粒子から構成される「複合粒子」の場合、その質量は個々の構成粒子の質量の単純な和にはなりません。これは場の量子論における「自発的対称性の破れ」という現象からくるものです。2013 年に CERN で発見されたヒッグス粒子は、力を伝えるゲージ粒子と呼ばれる粒子が本来質量 0 であるはずなのに、実際は質量を持つという事実を説明するものです。しかし、他の粒子とくに物質を構成するフェルミ粒子が質量を持つ理由などはまだ分かっていません。質量のなぞは物理学にとってもっとも重要な課題といえるかもしれません。

6.4 力について

さいごに運動方程式の左辺にある力について考えたいと思います。

ニュートン力学における「力」にはいくつかの働きがありますが、もっとも重要なはたらきは「運動の変化の原因」ということです。そのことを表すのがニュートンによる運動の 3 法則です。つまり、物理の対象となる粒子の間には、お互いになにか「相互作用」を及ぼし合う性質があり、それは粒子の運動の様子を変化させるはたらきをする、と考えたのでした。

したがって、「力」の一般論というのはあまりできません。万有引力や電磁気力といった具体的な相互作用を考える中で、それがどのような法則に従うのかを明らかにする必要があります。これについては、電磁気学についての章で掘り下げていきたいと思います[*9]。

しかし、ひとつだけこの段階でいえることがあります。それはニュートン力学において重要な意味をもつ「ポテンシャル」の概念が相対論では通用しない、ということです。たとえば、ニュートン力学における静電気力のポテンシャルは、

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r}$$

と表せます。ここで k はクーロンの定数、q_1 が力を及ぼす電荷、q_2 が力を受けている電荷、そして r がその 2 つの電荷の間の距離です。しかし、相対論ではこのような式を書くことはできません。なぜならば、このような「距離」を含む式はその空間的な隔たりを瞬時に超えた作用を表すからです。例えば 2 つの電荷があったとしましょう。片方が動けば距離が変わります。ですが、このようなポテンシャルが存在するならば、その「距離が変わった」という情報が瞬時に離れたもう一方の電荷に伝わってしまうことになるのです。それはどのような距離であっても、「いかなるものも光速度を超えて伝わることはない」という相対論の原理に反します。たとえ力のようなものであっても光速度を超えられないので「瞬時に」ということはできないのです。そうなると必然的に空間中を時間経過とともに伝わっていくような形の法則にならなくてはいけません。これは近接する空間点の間を結ぶ微分形の法則になります。これがどのようなものになるのかは、解析力学のあとに電磁気学を題材に議論していく予定です。このような要請が、場

[*8] これがニュートン力学との対応では運動方程式における m に相当するものになります。
[*9] 一般相対論においては万有引力はある意味「力ではない」ということになりますが。

の概念の必要性とその法則が「局所的」に書かれなければならないことにつながります。

力がどのような法則に従うかは後の議論として、相対論ではもうひとつの課題があります。それは四元ベクトルとしてかかれなければならないということです。従来の 3 次元ベクトルとしての力が四元ベクトルの空間成分と対応付けられるとして、力を四元力として書いたときの第 0 成分は何なのか、ということが問題になります。

四元ベクトル化された運動方程式をもう一度書いておきます。

$$\begin{aligned} F^\mu &= m\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \\ &= \frac{d}{d\tau}p^\mu \end{aligned}$$

となります。ここで、$p^\mu = mu^\mu$ は四元運動量です。この式をもとにして、四元運動量、四元力の第 0 成分が何を表すのかをみてみましょう。

6.5 四元力とエネルギ・運動量をどう定義するか？

運動方程式の意味を明らかにするに当たって、第 0 成分がどのようなものになるのかを考えましょう。そこで、この節では運動量の第 0 成分の意味がエネルギーであること、したがってその時間微分である力の第 0 成分は仕事率を与えていることを示しましょう。

四元運動量を

$$p^\mu = mu^\mu \tag{6.24}$$

で定義します。運動方程式の空間成分は、τ での微分をドットで表すと、

$$\begin{aligned} F^i &= \frac{d}{d\tau}p^i = m\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\beta^i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\ &= m\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\beta^i}{d\tau} + m\beta^i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{-2\beta_j\dot{\beta}^j}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{m}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\left((1-\beta^2)\dot{\beta}^i + \beta_j\dot{\beta}^j\beta^i\right) \end{aligned}$$

となります。ここで、$\beta_j\beta^j$ は空間成分だけなので、ベクトルの内積のことです。

一方、時間成分は、

$$\begin{aligned} F^0 &= \frac{d}{d\tau}p^0 = m\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\ &= m\frac{\beta_i\dot{\beta}^i}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となります。そこで、力と速度の空間成分の内積をとると、$\beta^2 = \beta_i\beta^i$ に注意して、

$$\begin{aligned} F_i\beta^i &= \frac{m}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{(1-\beta^2)\dot{\beta}_i + \beta_j\dot{\beta}^j\beta_i\right\}\beta^i \\ &= \frac{m}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\beta_i\dot{\beta}^i - \beta^2\beta_i\dot{\beta}^i + \beta_j\beta^j\beta_i\dot{\beta}^i\right) \\ &= m\frac{\beta_i\dot{\beta}^i}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = F^0 \end{aligned}$$

よって、$F^0 = F_i\beta^i = \vec{F}\cdot\vec{\beta}$ となり、力の第 0 成分は仕事率 (を光速で割ったもの) を表すことが分かりました。ということは、運動量の第 0 成分はエネルギー（を c で割ったもの）だろうという予想が立ちます。

p^0 はその定義 $p^0 = mu^0$ より、

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.25}$$

となります。力の第 0 成分が仕事率を c で割ったものであったことを考えると、これに c をかけたものがエネルギーとなるでしょう。つまり、

$$p^0 c = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.26}$$

がエネルギーを表すのではないか、ということです。この式が実際にエネルギーと関連するのどかは、ぱっと見ても分かりません。その意味を分かりやすくするために近似してみましょう。この分母にテイラー展開を用いて書き換えると、β が小さいときに、

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

となります。これを用いて近似すれば、

$$E = p^0 c = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.27}$$

となり、運動エネルギーが現れてきます。これでエネルギーと関連することが分かります。

このエネルギー p^0c の値を c^2 で割ったものを、

$$M = \frac{E}{c^2} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

を使えば、運動方程式は

$$F^i = \frac{d}{d\tau}\left(Mv^i\right)$$

の形をしています。これは先の定義でいえば「動かしにくさ」すなわち「慣性」の大きさはその速度とともに増大するというようにみえます。そして、それは物体のもつエネルギーに比例することになります。こうしてみると、エネルギーの大きさが慣性をきめているように思えるわけです。このエネルギーと慣性（質量）との関係については、次章で詳しくみていくことにしましょう。

こうして、運動方程式を共変化した結果、運動量とエネルギーが「四元運動量」としてひとつの量にまとまることになりました。これはローレンツ変換によって変換を受ける量です。これを確認しておきましょう。

静止状態での四元運動量ベクトルは、

$$p^\mu = (mc, 0, 0, 0) \tag{6.28}$$

になります。これを $-\beta^i$ でローレンツ変換をすると、

$$p'^0 = \gamma(mc - 0) = \gamma mc \tag{6.29}$$

$$p'^i = \gamma(0 + \beta^i mc) = \gamma mv^i = mu^i \tag{6.30}$$

となるので、空間成分は上の結論と同じく、

$$p^i = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} v^i \tag{6.31}$$

となります。このようにある粒子が運動しているときの運動量 $p'^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ は、静止時の運動量 $p^\mu = (mc, \vec{0})$ をローレンツ変換したものになります。ところで、ローレンツ変換をしても四元ベクトルの大きさは変わらなかったので、

$$(mc)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 \tag{6.32}$$

が成り立ちます。よって、これを変形すればエネルギーに関する式、

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \tag{6.33}$$

が得られます。この式が相対論におけるエネルギーについての正確なものになります。

6.6 相対論的運動方程式

ここまでの議論をまとめておきましょう。

■物理法則は「共変形式」で書かれなければならない　相対論的な物理法則を作ろうとする際、その方程式が慣性系の間での変換に対して同じように変化しなければ、その式はある特別な系でしか成り立たないものになり、相対性原理に反することになります。そこで方程式に現れる量はそれぞれローレンツ変換に対しての変換性がスカラー、ベクトル、テンソルなどと決まった形のものに限られます。こういった形で書かれた法則を「共変形式」と呼びます。

■相対論では「固有時」で微分する　物理法則は時間の微分でかかれていますが、相対論において時間は独立した量ではなく、あくまで時空の四元座標の１つとしてローレンツ変換を受けるものです。そこで、時間に代わるものとして「固有時」を用いることにします。時間を含めた時空座標を固有時で微分した「四元速度」、さらにそれを固有時で微分した「四元加速度」を導入しました。

■運動方程式の係数としての質量 m はスカラーである　質量については相対論と前後していくつかの実験が行われました。ここでは質量はスカラーであるという仮定のもとで話を進めます。しかし質量については物理学最大の課題としていまなお研究すべきことは多いことも覚えておきましょう。

■運動方程式　運動方程式をそのまま共変形で書くと、

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad = m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \tag{6.34}$$

で、ここで p^μ は四元速度に質量をかけた「四元運動量」です。

■相対論においてエネルギーと運動量はひとつの四元ベクトルに統一される　この四元運動量には、ニュートン力学には含まれない 4 番目（第 0 成分）の量が含まれます。これはエネルギーに対応する量でした。

次の章では、このエネルギーを表す式について掘り下げていきます。これは質量とエネルギーの等価性を表す有名な $E = mc^2$ についての議論します。これは相対論のもっとも重要かつ有名な帰結のひとつですが、かなり分かりにくい概念でもあるので、章をわけてじっくり見ていきたいと思います。また、ここまでの議論で力 F^μ については何も触れませんでした。相対論における力がどんなものになるのか、ということについては、第 8 章の「解析力学」のところで掘り下げ、具体的な力として第 9 章で電磁気についてみていく予定です。