第 7 章

質量とエネルギーの等価性

この章では、前章で結論されたエネルギーと質量の関係式、

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

について考えます。つまり、物体（系) のエネルギーと慣性質量がどのように関係するのか、ということを明らかにしていきます。

7.1 慣性は運動に伴って増大する

前章でも触れたように相対論における運動量は、

$$p^\mu = mu^\mu = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta^\mu$$

となります。これはニュートン力学と比較すると運動に伴って慣性質量が増大するようにみえることになるのでした。以前はこれをもって「質量の増大」と呼んでいたのですが、最近はこういった書き方はしません。また速度の方向も含めて考えると、物体の運動方向と視線のなす角度によっても質量が変わることになります[*1]。これについてはアインシュタインの 1905 年論文にも触れられており、「縦質量」「横質量」などという名前も付いていました。

このことを踏まえて、次の 2 つの概念を明確に区別しておきたいと思います。

一つ目は物体の「慣性の大きさ」です。これは静止状態では質量 m に等しくなっています。その物体が速度を持つように見える慣性系においては、この「慣性」の値は変化します。これをここでは**「慣性の増大」**と呼ぶことにします。

2 つ目は対象とする物体が内部構造をもつ、つまり複数の物体で構成される場合、その内部運動や要素どうしの相互作用による場のエネルギーなどによって、物体全体が静止しているときの質量 m が、個々の構成要素が独立に存在しているときの質量の和に等しくならない、ということが起きます。これは「質量の変化」ともいうべきものですが、ここでは**「エネルギーと質量の等価性」**と呼ぶことにします。まずは、エネルギーと質量が等価であることを光子を題材にして 2 つの側面から考えます。次に内部エネルギーが、正負に関わらず質量として現れる例として「質量欠損」と「熱エネルギー」について考えます。

7.2 光子エネルギーの持ち去る質量

まずは、物体が光を放出した際に失う質量について考えます。ここの議論はアインシュタインによる 1905 年の論文「エネルギーの内容で慣性は変化するか？」に依拠しています[*2]。

[*1] これは補足として別のところで計算をする予定です。

[*2] オリジナルは 1905 年のドイツ語の論文です。ここの記述はその英訳"Does Inertia of a Body Depend upon its Energy-Content"に依っています。今はパブリックドメインになっていて、例えば `http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/E_mc2/www/`から入手可能です。

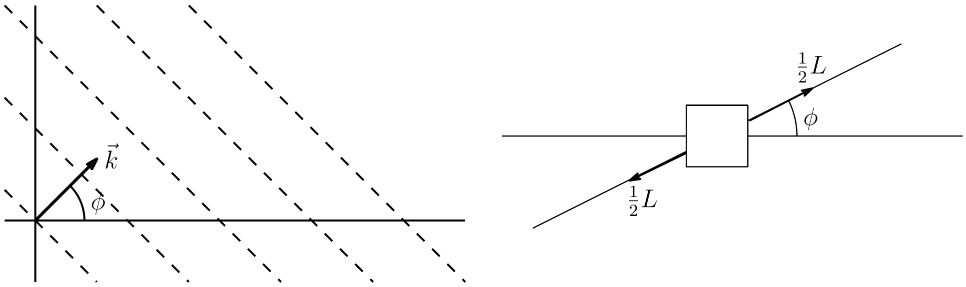

図 7.1　左：x 軸と角度 ϕ をなす光子　右：物体から 2 つの光子が放出される

いま図 7.1 左のように、ある慣性系 K 系エネルギー l を持つ光子を考え、これの波数ベクトルが x 軸となす角を ϕ とおきます。これを x 軸方向の速度 β を持つ慣性系 K' 系へローレンツ変換したとき、そのエネルギーは、

$$l' = l\frac{1-\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.1}$$

になります。

一方、K 系での静止物体のエネルギーを E_0 とします。この物体を K' 系から観測したときのエネルギーを H_0 としましょう。これもローレンツ変換によって結び付けられる量ですが、この 2 つのエネルギー差 $T_0 = H_0 - E_0$ は運動エネルギーにほかなりません（前章参照)。さて図 7.1 右のように、この物体が慣性系 K 系において、エネルギー $\frac{1}{2}L$ を持つ光子を x 軸に対して角度 ϕ およびその逆方向へ 1 つずつ放出したとしましょう。このようにしているのは、光子放出の反動で物体の速度が変化することを避けるためです。まだ証明はしていませんが、エネルギーと運動量がニュートン力学と同じく保存すると仮定するならば、放出後のエネルギー E_1, H_1 に関して次のような関係が成り立ちます。

$$E_0 = E_1 + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L \tag{7.2}$$

$$H_0 = H_1 + \frac{1}{2}L\frac{1-\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{2}L\frac{1+\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}} = H_1 + \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.3}$$

したがって、光子の放出前と後では運動エネルギーに差が生じることになります。その大きさは、

$$T_0 - T_1 = (H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\} \tag{7.4}$$

ここで前章と同じような近似を用いると、

$$T_0 - T_1 \approx \frac{1}{2}\frac{L}{c^2}v^2 \tag{7.5}$$

となります。つまり、エネルギー L を放出した物体の運動エネルギーの減少分は、そのエネルギーを c^2 で割った分の質量を失った場合のエネルギーに相当することが分かります。

この議論はエネルギーを失った分が質量に反映することを示しているわけですが、光子の側が質量をもつ、ということは言えるのでしょうか？

その議論に入る前に、混同しがちなことなので**光子の「静止質量」は 0 である**ことを確認しておきましょう。これは素粒子理論やさまざまな測定から結論されるわけですが、もし光子が静止質量 m をもつとするならば、その運動中の質量 M は

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ですが、これは光速で運動する光子においては $\beta = 1$ なので無限大に発散してしまいます。前章でみたエネルギーと運動量の関係式

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \tag{7.6}$$

を思い出しましょう。量子論では、光子の振動数 ν と波長 λ を使って、

$$E = h\nu, p = \frac{h}{\lambda}$$

の関係があります。ここで $c = \lambda\nu$ の関係を使えば、

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = pc$$

の関係がありますが、これは上のエネルギーと運動量の相対論的な関係式 (7.6) で $m = 0$ と置いた場合と同じです。量子論との整合性からも静止質量は 0 でなければならないのです[*3]。

さて、次に光子のエネルギーが質量をもつということを別の観点からみたいと思います。

7.3 光子が質量を運ぶ

前節では光子を放出したことによって物体が質量を失うという話でした。次にその光子が持つ質量について考えます。

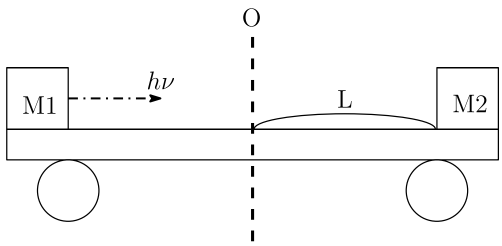

図 7.2 台車に 2 つの壁が乗っている状態。壁 M1 から光子が放出されると台車は反動で逆に動き出す。

いま、図 7.2 のような台車があり、その片方の壁M１から光子が発射され、反対側の壁M２へ当たって吸収されたとしましょう。

このとき光子が持つエネルギーを $E = h\nu$ とすると、その運動量は

$$p = \frac{E}{c}$$

でした。このとき光子が担う質量を m とすれば、運動量保存から台車の速度 v

$$(M_1 - m)v + M_2 v = -\frac{E}{c} \tag{7.7}$$

が成り立ちます。壁の間の距離を $2L$ とし台の中点を原点にとります。このとき台車全体の重心の位置は t 秒後には、

$$x(t) = \frac{(M_1 - m)(-L - vt) + m(-L + ct) + M_2(L - vt)}{(M_1 - m) + m + M_2} \tag{7.8}$$

になっています。全運動量が保存するためにはこれが移動してはいけないわけです。式をまとめると

$$x(t) = \frac{\{-(M_1 - m + M_2)v + mc)\}t + (-M_1 + M_2)L}{M_1 + M_2} \tag{7.9}$$

これが時間に依存しないようにするには t の係数が 0 になればよいので、

$$-(M_1 - m + M_2)v + mc = 0 \tag{7.10}$$

ここで、最初の式よりもとめた速度 v の式

$$v = \frac{E}{c(M_1 - m + M_2)} \tag{7.11}$$

[*3] 実際はド・ブロイやシュレーディンガーたちが量子論を作る際に、相対論と矛盾しないようにしたのです。

を代入すれば、

$$-\frac{E}{c}+mc=0 \tag{7.12}$$

つまり、$E=mc^2$ となりました。以上の考察からエネルギーを放出した物体が質量を失うだけでなく、光子に伴って質量が移動することが確かめられました。このように、光子そのものには「静止質量」はありませんが、光子のもつエネルギーは質量を持つのです。

7.4　物体の衝突と質量の変化

前章では変換性の観点から相対論的な運動量を導入しました。ここでは同じ式を別の観点からも導き出したいと思います。

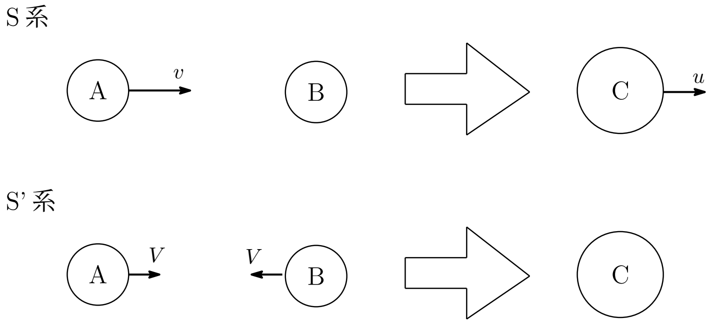

図 7.3　物体の衝突を、系 S（物体 B の静止系）と系 S'（2 物体の重心系）から観測する

いま図 7.3 の上のように、ある慣性系 S において、速度 v を持つ物体Aが静止している物体B（両方とも静止状態で測った質量は m とします）に完全非弾性衝突し、一体になって速度が u になる、という状況を考えましょう。

一方、図 7.3 の下のように、これを重心系 S' で見た場合、物体 A は速度 V、物体Bは速度 $-V$ に見えます。そして、衝突後は合体して速度が 0 になります。

ニュートン力学で運動量保存則を書けば、

$$S:mv+0=2mu \tag{7.13}$$

$$S':mV+m(-V)=0 \tag{7.14}$$

となり、$V=\frac{v}{2}$ かつ $u=V$ になります。ここで、$u=V$ は終状態を考えればニュートン力学でなくても成り立つ必要があります。

さて、これを相対論で考えるとどうなるでしょうか。

速度合成則から u と V の関係は、

$$v=\frac{V+V}{1+\frac{V}{c}\frac{V}{c}}=\frac{2V}{1+\frac{V^2}{c^2}} \tag{7.15}$$

になります。そうすると、S 系での運動量保存の式で左辺は、

$$mv+0=mv=\frac{2mV}{1+\frac{V^2}{c^2}}$$

となる一方で、右辺は、

$$2mu=2mV$$

となり一致しなくなります。速度の合成則が変わったことで運動量の定義も変えなければならなくなったのです。

そこで質量が速度に伴って変化するという仮説を立ててみます。速度の方向には依存しないはずなので、変化する質量を $m(v)$ と書き、$m(0)=m_0$ とします。その上で、衝突の前後において、質量と運動量はそれぞれ保存すると仮

定しましょう。これはまだはっきりと言えることではありませんが、証明は解析力学を導入したところで行うとして、ここでは相対論でも成り立つと仮定して話を進めます。

いま一体になったときの質量の式を $M(V)$ と書きます。このとき、質量・運動量それぞれの保存は、

$$m(v)+m(0)=M(V) \tag{7.16}$$
$$m(v)v+0=M(V)V \tag{7.17}$$

となります。ここで $M(V)$ の方を消去して、$m(v)$ の v への依存性を調べましょう。代入すれば、

$$m(v)v=(m(v)+m_0)V$$

これを変形して $m(v)$ と m_0 の比の形にすれば、

$$\frac{m(v)}{m_0}=\frac{V}{v-V}=\frac{\beta_V}{\beta-\beta_V} \tag{7.18}$$

です。ここで β,β_V はそれぞれ v,V を光速度 c で割ったものです。これに速度の合成則

$$\beta=\frac{2\beta_V}{1+\beta_V^2} \tag{7.19}$$

を代入すれば、

$$\frac{\beta_V}{\frac{2\beta_V}{1+\beta_V^2}-\beta_V}=\frac{\beta_V(1+\beta_V^2)}{2\beta_V-\beta_V(1+\beta_V^2)}=\frac{\beta_V(1+\beta_V^2)}{\beta_V-\beta_V^3}=\frac{1+\beta_V^2}{1-\beta_V^2} \tag{7.20}$$

になります。一方、少々天下り的ではありますが、

$$\frac{1}{\gamma^2}=1-\beta^2=1-\{\frac{2\beta_V}{1+\beta_V^2}\}^2=\frac{(1-\beta_V^2)^2}{(1+\beta_V^2)^2} \tag{7.21}$$

となり、まとめると、

$$\gamma=\frac{(1+\beta_V^2)}{(1-\beta_V^2)} \tag{7.22}$$

以上の計算により、

$$\frac{m(v)}{m_0}=\frac{(1+\beta_V^2)}{(1-\beta_V^2)}=\gamma \tag{7.23}$$

けっきょく、

$$m(v)=m_0\gamma \tag{7.24}$$

という式が導かれ、前節の結果と同じく運動量は

$$p=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}v$$

と定義されなければ、運動量の保存が成り立たない、ということになります。

一方、S' 系において考えるとどうなるでしょうか。質量の保存を考えると、

$$m_0\gamma_V+m_0\gamma_V=2m_0\gamma_V=M(0)=M_0 \tag{7.25}$$

になるはずです。この $M(0)$ を用いて式 (7.24) を $M(V)$ にあてはめれば、

$$M(V)=M_0\gamma_V=2m\gamma_V^2 \tag{7.26}$$

となります。一方、S 系での質量保存の式は $m_0(\gamma+1)=M(V)$ ですから、この 2 つの $M(V)$ が矛盾しないか確かめておきましょう。

まず式 (7.22) を逆に解いて、

$$1+\beta_V^2=\gamma(1-\beta_V^2) \tag{7.27}$$
$$\beta_V^2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tag{7.28}$$

が得られます。これを用いれば、

$$\gamma_V^2 = \frac{1}{1-\beta_V^2} \tag{7.29}$$
$$= \frac{1}{2}(\gamma+1) \tag{7.30}$$

と変形できます。よって、$2m_0\gamma_V^2 = m_0(\gamma+1)$ で 2 つの質量は一致することが確認できました。これはどういう意味を持つでしょうか？

S' 系（重心系）でみるということは、2 つの物体の重心運動を切り離して相対運動だけをみることになります。それぞれの静止質量が m_0 の 2 物体に速度を与えて衝突させたとき、終状態が静止状態になっても元の質量に戻らないのです。非弾性衝突は一見エネルギーが保存されないようにみえます。しかし、それは音や光などで飛び散ったのでない限り、物体の内部運動すなわち熱エネルギーとして残っているはずです。つまり、相対運動のエネルギーが熱エネルギーとして残っており、それが質量として観測されている、といえるでしょう。重心運動は慣性系を移れば変わるものです。これを分離しても残る、相対運動と相互作用のエネルギーが静止質量に反映するのです。

以下の 2 節では内部のエネルギーが質量に現れる例として、質量欠損と熱エネルギーについて考察していきます。

7.5 質量欠損

この節では、$E = mc^2$ についての話で必ずと言っていいほど触れられる「原爆の原理」としての質量欠損について考えます。

7.5.1 束縛状態の力学的エネルギー

まず質量欠損の話に入る前に、ニュートン力学における「束縛状態」についてエネルギーの観点から考えておきましょう。

たとえば万有引力や静電気力のような距離の 2 乗に反比例するような力によって束縛されている状態を考えます。束縛された物体が円運動をしているとすれば、向心力がその力によって生じているので、

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{k}{r^2}$$

です。ここで m が物体の質量、v が等速円運動の速さ、r が円軌道の半径、そして k は力の大きさを決める比例係数で、例えば万有引力なら $k = GMm$ などとなります。一方、このときの力学的エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}$$

となります。ただし、ここでは重心系から観測しており、重心運動のエネルギーは分離して考えることにします。これに先の力のつり合いから出る関係

$$mv^2 = \frac{k}{r}$$

を用いれば、

$$E = \frac{1}{2}\frac{k}{r} - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2r} \tag{7.31}$$

となることが分かります。つまり力学的エネルギーは負になります。これは次のようにも説明できます。束縛状態ということは、物体が力の中心から離れることができず、有限の距離までしかいくことができない状態を表します。一方、無限に離れた状態で静止している物体の力学的エネルギーは 0 です。したがって、もし力学的エネルギーが正の値ならば、無限遠においても正の運動エネルギーをもつことができることになり、無限遠にまで行けてしまいます。ということは、束縛状態であるためには力学的エネルギーが負になっていなければならないのです。このとき、物体に正の値 $|E|$ 以上のエネルギーを与えれば束縛状態を解くことができます。このエネルギー $|E|$ を結合エネルギーと呼びます。

7.5.2 結合エネルギーと質量欠損

以上の話を相対論的に考えてみましょう。ただし、前章でも触れたようにニュートン力学のような「ポテンシャル」を考えることはできないのでエネルギーの議論がそのまま適用できるわけではありません。またエネルギーは四元運動量の一成分であり、ローレンツ変換によって変わるものです。しかし、ここでも重心運動を分離した重心系でみればおおむね同じような議論が適用できます。また、力とエネルギーの相対論的な取り扱いなどは次章で行いますので、ここではだいたいの意味をつかんでもらえればと思います。

さて、上の議論を相対論的に書き直すとすれば、運動エネルギーを相対論的なエネルギーにすることです。つまり、力学的エネルギーに相当する部分は、

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 + U \tag{7.32}$$

ということになるでしょう。上の議論を踏まえればこの E は負でなければならないのです。

さて、いま 2 つの物体が互いに作用を及ぼし合って束縛状態にある状況を考えます。このときは 2 つの物体の間にはたらく相互作用のエネルギーを U と書けば、質量によるエネルギーも含めて K と書けば

$$K = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} + U \tag{7.33}$$

となります。ところで、このエネルギーは、

$$K = m_1c^2 + m_2c^2 + E \tag{7.34}$$

ですが、E は負ですから、

$$K < m_1c^2 + m_2c^2 \tag{7.35}$$

です。これは重心運動を分離したエネルギーですから、2 つの物体を併せた系が静止状態でも持っているエネルギー、すなわち静止質量によるエネルギーということになるはずです。この複合系の静止質量を M と書けば $K = Mc^2$ ですから、

$$M < m_1 + m_2 \tag{7.36}$$

が成り立ちます。そして、その差

$$\Delta m = m_1 + m_2 - M \tag{7.37}$$

を質量欠損と呼び、これは結合エネルギーと $|E| = \Delta mc^2$ の関係にあります。

これはどんな形による結合エネルギーにおいても同じことですが、化学結合ぐらいのエネルギーではほとんど観測にはかかりません。しかし、原子核の結合エネルギーのように大きなエネルギーとなればその差は実際の観測にもかかるほどの量になります。

7.6 気体の熱エネルギーと質量

次に気体の持つ内部運動、熱エネルギーが気体の質量に現れるか、ということについて考えます。

いま断熱容器に入れられた気体を考えます。容器の静止系 S から見た気体分子それぞれのもつ速度を v_i としましょう。議論を簡単にするために運動の方向を 1 方向に限って考えます。このときのエネルギーと運動量はそれぞれ

$$E_i = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_i^2}}, p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} \tag{7.38}$$

です。さて、この断熱容器が速度 V を持っているように見える系 S' を考えます。この系からみた各分子は、式をすっきりさせるために $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ と書けば、四元運動量のローレンツ変換を適用して、

$$E_i' = \gamma(E_i + Vp_i), p_i' = \gamma(p_i + \frac{V}{c^2}E_i) \tag{7.39}$$

となります。したがって、S' 系でみた気体の全エネルギーはこれの和ですから

$$E = \sum_{i=1}^{N} E'_i = \gamma(\sum_{i=1}^{N} E_i + V \sum_{i=1}^{N} p_i) \tag{7.40}$$

です。ところで、もとの系 S というのは気体が静止しているように見えるわけですから重心運動はなく、したがって全運動量も 0、つまり $\sum p_i = 0$ が成り立っています。よって、

$$E = \gamma \sum_{i=1}^{N} E_i \tag{7.41}$$

と表すことができます。同じように、全運動量についても

$$P = \gamma \frac{\sum_{i=1}^{N} E_i}{c^2} V \tag{7.42}$$

となります。したがって、これら 2 つの式は気体の静止質量 M_0 が、

$$M_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_i}{c^2} \tag{7.43}$$

となっているのと同じ形になっています。

以上の議論より、熱エネルギーのような内部運動のエネルギーも、その物体が静止しているときの質量として現れることが分かりました。

このように、エネルギーは力学的な様々な側面から質量としての性質をもつことが分かりました。これを「エネルギーと質量の等価性」といいます。つまり、エネルギーは質量であり、質量はエネルギーなのです。一方からもう一方へ変化したり転換したりするのではありません。本質的に「同じもの」なのです。

7.7 重力質量

この章の最後に、質量のもうひとつの側面、「重力質量」について触れておきたいと思います。

これまでの議論によってエネルギーが質量として現れることを確認してきました。ところで、私たちにとってもっとも身近な質量は「重さ」としての質量、すなわち「重力質量」ではないでしょうか？ここで「エネルギーには重力がはたらくのか？」という疑問がわいてきます。

質量欠損のところで触れたように、原子の質量のほとんどを担う原子核の質量は内部の結合エネルギーを反映して減少します。私たちがふだん重さを測って分かるのも同じ原子の質量です。ということは、負のエネルギーも含めて、エネルギーの分も「重さ」として測っていることになります。つまり、重力質量の面も含めて「エネルギーと質量は等価」といえるだろう、と予想されます。

アインシュタインは、この「慣性質量と重力質量は同じものである」ということを一般相対性理論を構築する際の出発点としました。これを「等価原理」といいます。逆に言えば、このことはいまのところ他の考察などから導き出されるものではなく、説明不可能な「理論の出発点」であるといえるでしょう。

7.8 まとめ

■エネルギーと質量は等価である　エネルギーはつねに質量を伴い、エネルギーの移動は質量の移動でもある。質量がエネルギーに変わったり、逆の変化が起きるのではない。われわれが観測する「質量」は、その物体のもつ正味のエネルギーを観測しているのである。そのとき、質量 m とエネルギー E の間には、

$$E = mc^2$$

の関係が成り立っている。

■等価原理　エネルギーと質量の等価性は、慣性質量だけでなく重力質量にも適用される。つねに「慣性質量＝重力質量」となることは一般相対性理論の出発点となる原理である。