第 8 章

解析力学による相対論

相対性理論は、慣性系を移っても法則が変わらないことを出発点としていました。物理学にはそういった「変換をしても変わらない表現」があります。それは「解析力学」と呼ばれるものです。また、前章までは仮定としておいたエネルギーや運動量などに関する「保存則」も解析力学の形にすることでその意味がより明確になるでしょう。

この章では、これまでの議論を踏まえて、相対論の力学を再現する解析力学を構築することを目標にします。ここでは必要なことをおさらいはしますが、ニュートン力学における解析力学について基本的なことは理解されているものとして進めます。

8.1 作用としてふさわしいものは何か？

解析力学では、ある関数 $L(\vec{x}, t)$ があって、その積分として定義される作用

$$I = \int_{t_A}^{t_B} L dt \tag{8.1}$$

を考えます。

作用の定義における積分は、対象としている最初の時間 t_A から最後の時間 t_B にいたるまでの、粒子の動く経路 C に沿った線積分を考えています。この経路は、始点 $\vec{x}(t_A)$ と終点 $\vec{x}(t_B)$ を固定しておいて、そこをつなぐ経路を時間の関数 $\vec{x}(t)$ として与えます。すると、この作用積分の値はその経路に依存して決まることになります。これは経路を表す関数を決めると積分 I も決まる、という意味で、作用は「関数の関数」ということができます。そういうものを「汎関数」と呼び、経路 C に対する汎関数という意味で $I[C]$ と書くことがあります。

この積分の中にある関数 L をラグランジュ関数と呼びます。解析力学では、物理的な現実を表すラグランジュ関数を決定することが出発点になります。解析力学、とくに場の解析力学や場の量子論に進むと、このラグランジュ関数がどうしても「天下り」に与えられていることに違和感を感じることがあります。しかし、これからの議論において、ラグランジュ関数は相対論的な要請を含む物理的な条件から、ありえるラグランジュ関数を設定してそれについて調べてみる、といった方法論をとることになります。なにか別の物理法則から演繹的にラグランジュ関数が設定されることは稀です。むしろ、自然に関する探求の中でニュートンの運動法則や万有引力の法則、電磁気の理論ができあがっていったように、「自然を表現するもの」を手探りで見出していくようなものになるでしょう。素粒子論で出てくるラグランジュ関数も、それから導かれる計算結果と実験との比較から決定されていった経緯があります。この章の前半は、相対論を表現するラグランジュ関数を見つけることが目標です。

この作用が、実際に物理的に実現される経路をどうやって決めるのでしょうか。その現実に現れる経路を C としたとき、その経路とちょっとだけ違う、始点と終点は同じ経路 $C + \delta C$ を考えます。$+\delta C$ というのは普通の足し算ではなく、「ちょっとだけ変えましたよ」ということを比喩的に書いたものと考えてください。そのとき、作用の値もちょっとだけ変わります。その変化分を δI と書くことにしましょう。このように、「関数の関数」である汎関数がもとの関数の変化に対して変化した分を「変分」と呼びます。そして、もし元の経路 C が物理的に実現される経路になっているならば、この変分が

$$\delta I = 0 \tag{8.2}$$

と停留点になっているようなラグランジュ関数を探しましょう、というのが解析力学の出発点になります。

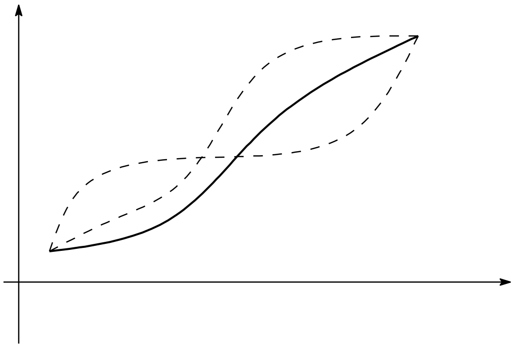

図 8.1　いくつかの可能な経路（点線）のうち、実際に起こる経路（実線）が選ばれる仕組みは何か？

さて、そのラグランジュ関数としてどのようなものを考えればよいでしょうか。

作用は、ラグランジュ関数を考えている経路に沿って積分したものなので、経路の「形」によって決まるものです。その「形」は、なにもその経路を作る点の「座標」だけとは限りません。その曲がり具合、つまり微分係数も「形」に含まれるものといってよいでしょう。むしろ、微分係数を含めることができなければ、あまり意味のあるものは作れないでしょう。では、逆に無制限に微分係数をいれてもいいでしょうか？ここで物理的な考察をいれておきます。

ニュートンの運動方程式は、２階の微分方程式でした。例えば、$F = mg$ のときは、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \tag{8.3}$$

であり、この解は、

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0 \tag{8.4}$$

です。ここで、式の中の v_0, x_0 は、それぞれ $v(0) = v_0, x(0) = x_0$ という意味があります。ほかの場合でも必ず２つの積分定数が現れ、それは形は違っても初速度と初期位置に結び付けられるものです。

つまり、ある物理的な配置が決まった中では、ある時間における物体の位置と速度が与えられれば、その物体の運動は決まってしまうということができるでしょう。いいかえれば、「物理的な状態は、位置と速度を指定すれば決まる」ということができると思います。

これを踏まえれば、運動方程式を再現するラグランジュ関数は位置と速度の関数として定義されるべきということになるでしょう。よって作用は、

$$I\left[C\right] = \int_C L(\vec{x}(t), \vec{v}(t))dt \tag{8.5}$$

と書かれるべきということになります。

このように、ラグランジュ関数が１階微分までを含んでいるとき、そのような停留点を与える経路の満たすべき微分方程式は、

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^\mu} = 0 \tag{8.6}$$

でした。これをオイラー・ラグランジュ方程式と呼びます。ここではまだ時間と時間変化としての速度を使って書いています。ただし、これらはあくまでパラメーターとしての意味しかないので、これを固有時と四元速度に書き換えても式の形は変わりません。これは解析力学の強みの一つでしょう。

8.2　相対論的なラグランジアン

次に、相対論的な運動方程式を再現するラグランジュ関数とはどんなものなのか考えていきましょう。まずは粒子だけが存在し、何も相互作用を受けていない状態、つまり自由な粒子のラグランジュ関数を求めます。

相対論で考える場合、作用は「スカラー」すなわちローレンツ変換で不変なものでなくてはならないでしょう。そうでなければ慣性系を移ると運動の見え方が変わってしまうことになります。さらに、前節の議論を踏まえるならば、スカラーの１階微分までということになります。

そうなると、相対論でまず使えるスカラーは「固有時 τ」ということになるでしょう。これはミンコフスキー時空における「距離」のようなものですから、これが運動を決めていると考えるのは自然のように思います。それの１階微分ということですから、作用は

$$I = k \int d\tau \tag{8.7}$$

という形になるでしょう。ここで積分はミンコフスキー時空における経路の「長さ」そのものです。そして、比例係数 k はこれから物理的な考察から決めなければならないものです。これは本来、ほかの場や相互作用があってはじめて決まるべきものですが、ここではニュートン力学との対応から係数を決めておきましょう。

ニュートン力学での自由粒子のラグランジュ関数は、

$$L = \frac{1}{2} m v^2 \tag{8.8}$$

でした。相対論的なラグランジュ関数が、非相対論的な近似においてこれと一致するということを要請します。すると、

$$I = k \int d\tau = k \int \sqrt{1-\beta^2} dt \approx k \int (1 - \frac{1}{2}\beta^2) dt \tag{8.9}$$

ラグランジュ関数は、変分したときの「変化」が重要なので定数項は物理に現れてきません。そこで定数の 1 に当たる部分を除けば、

$$I \approx k \int (-\frac{1}{2}) \frac{v^2}{c^2} dt \tag{8.10}$$

ということになるでしょう。これとニュートン力学のラグランジュ関数とを比べれば

$$k = -mc^2 \tag{8.11}$$

ということになるでしょう。したがって、

$$I = -mc^2 \int d\tau \tag{8.12}$$

が、相対論における自由粒子のラグランジュ関数ということになります。

8.3 相対論的運動方程式を導く

では、この作用から第 6 章で導いた相対論的な運動方程式が再び得られるか試してみましょう。

ここでの計算では、以前に用いた四元速度 u^μ を用います。これは、

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

でした。そして内積が $u^\mu u_\mu = c^2$ となる性質があります。

運動方程式を導くために作用の式を変形し、ラグランジュ関数を座標と四元速度を用いた表現に改めておきます。

$$\begin{aligned}
I &= -mc^2 \int d\tau && (8.13)\\
&= -mc^2 \int \frac{1}{c} \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} && (8.14)\\
&= -mc \int \sqrt{\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2} d\tau && (8.15)\\
&= -mc \int \sqrt{u^\mu u_\mu} d\tau && (8.16)
\end{aligned}$$

と書き直すことができますから、ラグランジュ関数は、

$$L = -mc\sqrt{u^\mu u_\mu} \tag{8.17}$$

になります[*1]。これにオイラー・ラグランジュ方程式を適用します。これは、

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = 0 \tag{8.18}$$

という形でした。これに先のラグランジュ関数を代入すれば、これには座標が陽に含まれていないので、第１項は

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \tag{8.19}$$

です。第２項を計算するために、まず速度での微分を実行します。

$$\sqrt{u^\mu u_\mu} = \sqrt{(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2} \tag{8.20}$$

ですから、これを $u^i (i \neq 0)$ で微分すれば、

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{-mc}{2}\frac{-2u^i}{\sqrt{u^\mu u_\mu}} \tag{8.21}$$

$$= mu^i \tag{8.22}$$

になります。最後の変形で分母に $u^\mu u_\mu = c^2$ を用いました。したがって、

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{d}{d\tau}(mu^i) = m\frac{d^2x^i}{d\tau^2} \tag{8.23}$$

となります。よって、オイラー・ラグランジュ方程式により、

$$m\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = 0 \tag{8.24}$$

となって、自由粒子の運動方程式が得られました。

8.4 相対論における運動量とエネルギー

次に保存量として、運動量とエネルギーについて考えます。

オイラー・ラグランジュ方程式が成り立っているとき、ラグランジュ関数の全微分を計算します。

$$\frac{dL}{dx^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} + \frac{\partial L}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial L}{\partial u^\nu}\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} \tag{8.25}$$

です。ここで、いまのところラグランジュ関数は座標を陽に含まないので第１項は０です。また、第２項についている座標を座標で微分するところは、$\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu$ です。また、オイラー・ラグランジュ方程式より、

$$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\nu} \tag{8.26}$$

でした。第３項については、四元速度を座標で微分するところを、

$$\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}$$

と変形しておきます。これらを用いれば、

$$\frac{dL}{dx^\mu} = 0 + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\nu}\right)\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial L}{\partial u^\nu}\frac{d}{d\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \tag{8.27}$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}\right) \tag{8.28}$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\nu}\delta^\nu_\mu\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu}\right) \tag{8.29}$$

[*1] このルートの中の式は、特殊相対論の範囲では定数です。しかし、この後に速度での微分をする都合からこのように書いておきます。

よって、x^μ 方向への変化に対してラグランジュ関数が変化しないならば、右辺の括弧の中にある量は時間変化しないことになります。そこで、これを「一般化運動量」と呼び

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \tag{8.30}$$

で定義します。反変成分で微分していますので、これは共変ベクトルということになります。

これを実際に計算してみます。空間成分については前節で計算したように、

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} = -mu_i \tag{8.31}$$

となり、添字を上げて反変成分にすれば、

$$P^i = mu^i \tag{8.32}$$

となります。また、時間成分については、計算を同様にすれば

$$P_0 = \frac{\partial L}{\partial u^0} = mu_0 \tag{8.33}$$

です。ここで u^0 は、

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{d(\sqrt{1-\beta^2}t)} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.34}$$

です。第０成分は反変・共変で符号は変わらないので、

$$P_0 = P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.35}$$

となり、これも第 6 章で導いたエネルギーの式と同じになりました。

8.5 時間座標でのラグランジュ関数とハミルトニアン

いままでの議論では作用の定義を固有時による積分で書いていました。この書き方はほかの本と違った内容になっているかもしれません。ここまでは、ある一つの粒子に着目し、その運動について考えてきたので固有時を用いる方法が見通しのよいものでした。しかし、これから電磁場などの時空に広がっているものを対象にする場合、時空座標で書く必要が出てきます。しかし解析力学の強みで、パラメーターを時間座標に変えても同じ議論ができます。この場合、ラグランジュ関数は、

$$I = -mc^2 \int \sqrt{1-\beta^2}dt \tag{8.36}$$

になります。そして、その先の計算は途中こそ違うものの同じ結論になります。

ここでもう一つの解析力学における重要な量であるハミルトニアンも導いておきましょう。

これは「ルジャンドル変換」という操作によって得られます。

$$H = P_i v^i - L \tag{8.37}$$

いまは時空座標で考えていますから四元速度でなく普通の速度を用いています。これによって第１項が共変な量になりません。ニュートン力学ではハミルトニアンはエネルギーと結び付けられる量でした。エネルギーは今までみてきたようにスカラーではありません。実はハミルトニアンの方は四元スカラーではないのです。そのため相対論的な議論ではラグランジュ関数を使うほうが多いようです。

さてハミルトニアンを計算しましょう。

$$H = P_i v^i - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - (-mc^2\sqrt{1-\beta^2}) \tag{8.38}$$

$$= \frac{mv^2 + mc^2(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.39}$$

$$= \frac{mv^2 + mc^2 - mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.40}$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.41}$$

したがって、相対論においてもハミルトニアンはエネルギーと同じ式になることが確認できました。ハミルトニアンは、これを運動量の関数として書く必要があります。そのためには、この式を変形するのでなく、エネルギーと運動量についての関係、

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

を用います。これを E について解けば、

$$H = E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \tag{8.42}$$

になり、これが相対論におけるハミルトニアンということになります[*2]。

こうして、自由な粒子のエネルギーや運動量が、相対論においても保存量になることが確認できました。しかし、これでは物理としてはまだ土台を作ったに過ぎません。実際の問題においては、粒子が互いに作用を及ぼし合っている中でのエネルギーや運動量の保存が問題になります。しかし、一般論としてそういうものを議論するのはここまでが限界です。第3部からは、もっとも重要な現象である電磁気の要素を取り込んで、文字通りの「力学」として成り立つように整備していきます。その中ではじめて、保存則というものがどのように成り立っているかが明らかになるでしょう。

まとめ

この章では、相対論を解析力学で表現することを議論してきました。

■自由粒子の作用　まず作用はスカラーになるという要請から、自由粒子の作用は、

$$I = -mc^2 \int d\tau \tag{8.43}$$

となります。

そこから、相対論的な運動方程式、

$$m\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = 0 \tag{8.44}$$

が得られました。

■解析力学における保存量　保存量は、

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} \tag{8.45}$$

で定義され、相対論的な運動量とエネルギーの式に一致します。

■ハミルトニアン　時空の座標で定義されたラグランジュ関数は、

$$I = -mc^2 \int \sqrt{1-\beta^2}dt \tag{8.46}$$

になります。

そこから作られるハミルトニアン

$$H = P_iv^i - L \tag{8.47}$$

を計算するとエネルギーと同じ式になり、これを運動量を用いて書けば、

$$H = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \tag{8.48}$$

になります。

[*2] ここの最後の計算で平方根を取る際に、負の平方根はあっさりと捨てました。古典的な相対論としては静止質量によるエネルギーも含めれば負にはならないはずだからです。しかし、相対論的な量子力学を考える際にはこの負の解を捨てるわけにはいきません。