第 9 章

電磁場のローレンツ変換

9.1　「場」概念の必要性

素朴には、万有引力や電気力、磁気力などは、空間的な隔たりを超えて物体の間にはたらいているようにみえます。このような考え方は「遠隔作用論」と呼ばれて、一定の成功を収めてきました。一方で力が伝わる「仕組み」にこだわり、なにかそのようなものを伝える媒介者があるという考え方もあり、それは「近接作用論」と呼ばれています。19世紀に入ると電磁誘導などの現象は、直接そこに力がはたらくというより、なにかそれを伝えるものがあるという考え方を強く示唆します。そのような中でマクスウェルの電磁場の理論が作られていくことになります。その結果の一つが電磁波の存在であり、相対論の誕生へとつながっていくわけです。

相対論を一度認めてしまうと、「遠隔作用」というのはありえなくなります。光の速度が一定であり、それを超えることができないということは、力といえども空間を超えて一瞬で伝わることはできないということになるからです。したがって、相対論における「力」を考える際、それを媒介する「場」の概念は欠くことのできないものになります。

この章以下、電磁場を題材として、相対論において「場」がどのように扱われるのか、それによって物理現象がどのように解釈されるのか、ということについてみていきたいと思います。

9.2　マクスウェルの方程式とポテンシャル

以下、マクスウェルの方程式を含めた電磁気学の基本についてはある程度の知識があることを前提として話を進めます。

マクスウェルの方程式とは、次の４つの方程式を指します。電磁気学の入門的な本では磁場は H のことで、そこから磁束密度 $B = \mu H$ が定義されますが、実際に真空に生じる場としては B の方がより基本的な量と考えられています。これは歴史的な順番として H が磁場を表す量としてはじめに考えられたという話です。この文章では B の方を磁場と呼びます。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{9.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}} + \frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t} = 0 \tag{9.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0 \tag{9.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{B}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\mathrm{J}} \tag{9.4}$$

また、電荷密度 ρ と電流密度 $\vec{\mathrm{J}}$ の間には連続の方程式（電荷保存則）、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{J}} = 0 \tag{9.5}$$

が成り立ちます。そして、荷電粒子にはローレンツ力として

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = q\overrightarrow{\mathrm{E}} + q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\mathrm{B}} \tag{9.6}$$

がはたらきます。これから、これらの方程式を相対論的に共変な形へと書き換えていくことが第 1 の目標になります。

マクスウェル方程式の右辺に現れる物質に付随する量、電荷密度 ρ と電流密度 $\overrightarrow{\mathrm{J}}$ は、電磁場を生み出す「源」という意味で「ソース」といわれます。このマクスウェルの方程式をもう少し使いやすい形へと変形するために、まずこの右辺にソースが現れる式と現れない式に分類して考えます。

まずはソースを含まない式 (9.2) と式 (9.3) について考えます。これらの式は電磁場の基本的性質を決めていると考えられます。磁場が満たす式 (9.3) のように、発散が 0 になるベクトル場は一般的に何か別のベクトル場 $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ を用いて、

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{A}} \tag{9.7}$$

というように表せます。なぜならば、ベクトル解析の公式により恒等的に

$$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{\mathrm{A}}) = 0$$

が成り立つからです。このベクトル $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ を電磁場のベクトルポテンシャルと呼びます。

一方、よく知られているように、静電場については電位 ϕ が定義できることが知られていて、これを用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\nabla}\phi \tag{9.8}$$

と表すことができます。これはベクトルポテンシャルとの対比でスカラーポテンシャルとも呼ばれます。ところが、これを式 (9.2) に代入しようとすると、これもベクトル解析の公式

$$\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla}\phi) = 0$$

が成り立つので、電位は電磁誘導に関与しません。そこでベクトルポテンシャルの定義を磁場のところに代入すると、

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{E}} + \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{A}}) = 0 \tag{9.9}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\mathrm{E}} + \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{A}}}{\partial t}) = 0 \tag{9.10}$$

となって、ベクトルポテンシャルの時間微分が電場に利いてくることが分かります。

これらを組み合わせると、2 種類のポテンシャルを使って、電場と磁場はそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{A}}}{\partial t} \tag{9.11}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{A}} \tag{9.12}$$

と表せることになります。

次にソースからこのポテンシャルを決める式を導きましょう。まずは式 (9.1) より

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(-\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{A}}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{9.13}$$

となります。また、式 (9.4) により、

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{A}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{A}}}{\partial t} \right) = \mu_0 \overrightarrow{\mathrm{J}} \tag{9.14}$$

が成り立ちます。ここで、ベクトル解析の公式

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{A}} = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}} - \overrightarrow{\nabla}^2\overrightarrow{\mathrm{A}}$$

を用いれば、この式を整理すれば、

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\right)\vec{\mathrm{A}}+\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{A}}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\mu_0\vec{\mathrm{J}} \tag{9.15}$$

と書くことができます。これをもう少し変形していくこともできますが、ここではこの形にとどめておきます。これら 2 式がソースからポテンシャルを決めるわけですが、まだこれではその変換性が明らかではありません。

その話に入る前に、まずはソースの側の変換について考えましょう。

9.3 電荷・電流密度の変換と電荷の保存

この節では、電荷と電流密度がローレンツ変換によってどのように変換するか考えます。

一つ実験事実から分かっていることとして、素電荷 e の値はは物体の運動状態によらないということは前提としておきましょう。これは物質と電磁場との相互作用の強さを表す量であって、場の量子論を考えなければ解けない問題ですので、いまのところは「事実」ということにして受け入れておきましょう。

いま点電荷 e が速度 $\vec{v}$ で運動している状態を考えます。いま時刻 $t=0$ での点電荷の位置を原点にとると、デルタ関数を用いて電荷密度と電流密度は

$$\begin{cases}\rho(\vec{r})=e\delta(x-v_xt)\delta(y-v_yt)\delta(z-v_zt)\\ \vec{j}(\vec{r})=\rho(\vec{r})\vec{v}\end{cases} \tag{9.16}$$

で表されます。これの変換を考えていきます。このとき、デルタ関数に関する公式

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{9.17}$$

を何度か使うことになります。

デルタ関数の中についてローレンツ変換を行います。

$$\begin{aligned} x-vt&=\gamma\left\{(x'+Vt')-v_x(t'+\frac{V}{c^2}x')\right\} && (9.18)\\ &=\gamma\left\{(1-\frac{Vv_x}{c^2})x'-(v_x-V)t'\right\} && (9.19)\\ &=\gamma\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)(x'-v'_xt') && (9.20)\end{aligned}$$

ですから、x 方向のデルタ関数はローレンツ変換によって次のようになります。

$$\delta(x-v_xt)=\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)}\delta(x'-v'_xt') \tag{9.21}$$

次に y 方向です。

$$y-v_yt=y'-v_y\gamma\left(t'+\frac{V}{c^2}x'\right) \tag{9.22}$$

ですが、これは $\delta(x'-v'_xt')$ とセットなので、$x'=v'_xt'$ のときに限ります。これを代入して、

$$\begin{aligned} y-v_yt&=y'-v_y\gamma\left(1+\frac{V}{c^2}\frac{v_x-V}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}t'\right) && (9.23)\\ &=y'-\gamma\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{v_y}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}t' && (9.24)\\ &=y'-v'_yt' && (9.25)\end{aligned}$$

となります。z 方向も同じですので、結局、3 次元のデルタ関数はローレンツ変換によって以下のように変換します。

$$\delta(x-v_xt)\delta(y-v_yt)\delta(z-v_zt)=\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)}\delta(x'-v'_xt')\delta(y'-v'_yt')\delta(z'-v'_zt') \tag{9.26}$$

よって、素電荷 e の部分は変換をしないという前提でしたので、電荷密度の変換は、

$$\rho = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)}\rho' \tag{9.27}$$

これを逆に解いて、

$$\rho' = \gamma\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)\rho \tag{9.28}$$

$$= \gamma\left(\rho - \frac{V}{c^2}j_x\right) \tag{9.29}$$

次に電流密度について考えます。電流密度は電荷密度にその電荷の速度を乗じたもので、

$$j_x = \rho v_x \delta(x - v_x t)\delta(y - v_y t)\delta(z - v_z t) \tag{9.30}$$

で定義されます。ここは電荷密度も速度も変換則が得られているので、これを用いて変換を求めます。

$$j'_x = \rho' v'_x \delta(x' - v'_x t')\delta(y' - v'_y t')\delta(z' - v'_z t') \tag{9.31}$$

$$= \gamma\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)\rho \times \delta(x - v_x t)\delta(y - v_y t)\delta(z - v_z t) \times \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \tag{9.32}$$

$$= \gamma\rho(v_x - V)\delta(x - v_x t)\delta(y - v_y t)\delta(z - v_z t) \tag{9.33}$$

$$= \gamma\left(j_x - \frac{V}{c}\rho c\right)\delta(x - v_x t)\delta(y - v_y t)\delta(z - v_z t) \tag{9.34}$$

これらの変換式をローレンツ変換の形式に合わせるならば、

$$\rho' c = \gamma\left(\rho c - \frac{v}{c}j_x\right) \tag{9.35}$$

$$j'_x = \gamma\left(j_x - \frac{v}{c}\rho c\right) \tag{9.36}$$

したがって、$j^\mu = (\rho c, \vec{j})$ が四元ベクトルとして変換することが分かりました。

また、これを用いると、電荷保存則を共変形式で書くことができます。これは、

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{J}} = \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{9.37}$$

となります。

9.4 電磁場の変換

ソースのない真空中のマクスウェル方程式で考えます。つまり右辺がすべて 0 という場合に限ることで少し楽をしようということです。

ローレンツ変換は時間と空間の混じるものですから、時間微分を含む式を使います。相対論的な形にするために、ct という組み合わせが出るように変形しておきます。

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{\mathrm{E}}}{c}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}} \tag{9.38}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t} = \frac{1}{c}\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}} \tag{9.39}$$

そこで、以下すっきりさせるために電場 $\vec{\mathrm{E}}$ を c で割ったものを改めて $\vec{\mathrm{E}}$ と書くことにします。そして、この式の x 成分を書き下せば、

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \tag{9.40}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \tag{9.41}$$

ここで、微分の変換式を思い出しましょう。

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} - \beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} + \beta\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

でした。これを用いれば、

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} - \beta\frac{\partial E_x}{\partial x'}\right) \tag{9.42}$$

となります。ここで、$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\mathrm{E}} = 0$ に変換を用いることで、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \gamma\left(\frac{\partial E_x}{\partial x'} + \beta\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'}\right) + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} = 0 \tag{9.43}$$

を得ますから、

$$\gamma\frac{\partial E_x}{\partial x'} = -\gamma\beta\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{\partial E_z}{\partial z'} \tag{9.44}$$

という関係が成り立ちます。これを用いれば、

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \gamma\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} - \beta\left(\gamma\beta\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'}\right) \tag{9.45}$$
$$= \gamma(1-\beta^2)\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} - \beta\left(\frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'}\right) \tag{9.46}$$
$$= \frac{1}{\gamma}\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} - \beta\left(\frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'}\right) \tag{9.47}$$

となります。これを、式 (9.40) に代入すると、

$$\frac{1}{\gamma}\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} - \beta\left(\frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'}\right) = \frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'} \tag{9.48}$$

これをまとめると、

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} = \gamma\left\{\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_z - \beta E_y\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(B_y + \beta E_z\right)\right\} \tag{9.49}$$

これが、変換後の場においてマクスウェル方程式と一致しているためには、

$$E'_x = E_x$$
$$B'_y = \gamma(B_y - \beta E_z)$$
$$B'_z = \gamma(B_z + \beta E_y)$$

となることが分かります。このような計算を他の成分についても行えば、場の変換は、

$$E'_x = E_x \tag{9.50}$$
$$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \tag{9.51}$$
$$E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \tag{9.52}$$
$$B'_x = B_x \tag{9.53}$$
$$B'_y = \gamma(B_y - \beta E_z) \tag{9.54}$$
$$B'_z = \gamma(B_z + \beta E_y) \tag{9.55}$$

ということになります。これは今までの変換とは似てはいますが形が違います。速度の方向には変化せず、他の方向は電場と磁場が混じることになります。この意味は次の章で明らかにするとして、ここでは次に進みます。

9.5 電磁ポテンシャルの変換

ポテンシャルとソースの関係式 (9.13)(9.15) を再掲します。

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{\mathrm{A}} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{A}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{\mathrm{J}}$$

電磁場のポテンシャルにはゲージ変換という自由度があることが知られています。そのような変換のひとつに「ローレンス・ゲージ」というものがあり、これを用いるとスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの間に関係式、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{A}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{9.56}$$

が成り立つようにできます。これはベクトルポテンシャルの式における第 2 項の $grad$ の中が 0 になることを意味します。これを用いると、スカラーポテンシャルの第 2 項の方も、

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{A}}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{9.57}$$

と変形できます。これによって、どちらの式もシンプルかつ同じ形をした、

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{9.58}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{\mathrm{A}} = \mu_0 \vec{\mathrm{J}} \tag{9.59}$$

という式になりました。ここで左辺の微分演算子は、共変形式で書けばスカラーの $\partial_\mu \partial^\mu$ です。また、電荷密度の方ですが、

$$\mu_0 c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \tag{9.60}$$

ですから、電荷密度の四元ベクトルでの形が ρc だったことを踏まえると、

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \frac{\phi}{c} = \mu_0(\rho c) \tag{9.61}$$

になります[*1]。よって右辺が四元ベクトルになるのですから、電磁ポテンシャルの四元ベクトル形は、$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \vec{A})$ ということになります。したがって、四元ポテンシャルとソースを結びつける方程式の共変形式は、

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu \tag{9.62}$$

になります。

9.6 ローレンツ力の変換性

さて、この章の最後に、力の変換性を導きます。これはローレンツ力と電磁場による仕事率の式として

$$\vec{\mathrm{F}} = q\vec{\mathrm{E}} + q\vec{v} \times \vec{\mathrm{B}} \tag{9.63}$$

$$w = q\vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{v} \tag{9.64}$$

がどのようにローレンツ変換によって変換を受けるかを考えていきます。

[*1] こう考えると、光速度 c は電磁気学に限定されない一般的な定数ですから、電磁気学における物質から場が発生する強さは μ あるいは ε のどちらか一方だけで決まることになるでしょう。これは電場と磁場が一つの概念に統一されることを示唆しています。

いま、簡単のために $\overrightarrow{v} = (v, 0, 0)$ として、x 方向への速度 V でのローレンツ変換を考えます。このとき変換後の粒子の速度は速度の合成則により

$$V' = \frac{v - V}{1 + \frac{vV}{c^2}}$$

になることを覚えておきましょう。ここで、今までの変換式を使っていきます。また荷電粒子では電流密度は $j_x = qv$ です。

$$\begin{aligned}
F'_x &= q'E'_x = (q'c)\frac{E'_x}{c} && (9.65)\\
&= \gamma\left(qc - \frac{V}{c}j_x\right)\frac{E_x}{c} && (9.66)\\
&= \gamma\left(qE_x - \frac{V}{c^2}qvE_x\right) && (9.67)\\
&= \gamma\left(F_x - \frac{V}{c}\frac{w}{c}\right) && (9.68)
\end{aligned}$$

次に y と z は同じなので y だけ計算します。

$$\begin{aligned}
F'_y &= q'\left\{E'_y + (v'_z B'_x - v'_x B'_z)\right\} && (9.69)\\
&= q'c\left\{\frac{E'_y}{c} + \frac{v'_z}{c}B_x - \frac{v'_x}{c}B'_z\right\} && (9.70)\\
&= \gamma\left(qc - \frac{V}{c}j_x\right)\left\{\gamma\left(\frac{E_y}{c} - \frac{V}{c}B_z\right) + 0 - \frac{1}{c}\frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}\gamma\left(B_z - \frac{V}{c}\frac{E_y}{c}\right)\right\} && (9.71)\\
&= qc\left(1 - \frac{Vv}{c^2}\right) \times \gamma^2 \times \frac{1}{c} \times \left\{(E_y - VB_z) - \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}\left(B_z - \frac{V}{c}\frac{E_y}{c}\right)\right\} && (9.72)\\
&= \gamma^2 q\left\{\left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)(E_y - VB_z) - (v - V)\left(B_z - \frac{V}{c}\frac{E_y}{c}\right)\right\} && (9.73)\\
&= \gamma^2 q\left\{\left(1 - \frac{vV}{c^2} + \frac{vV}{c^2} - \frac{V^2}{c^2}\right)E_y + \left(-V + \frac{vV^2}{c^2} - v + V\right)B_z\right\} && (9.74)\\
&= \gamma^2 q\left\{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)E_y - \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)vB_z\right\} && (9.75)\\
&= q(E_y - vB_z) && (9.76)\\
&= F_y && (9.77)
\end{aligned}$$

3 行目から 4 行目の変化で $j_x = qv$ を使っています。

次に仕事率の変換を計算しましょう。

$$\begin{aligned}
w' &= q'E'_x v'_x && (9.78)\\
&= \gamma\left(q - \frac{V}{c^2}qv\right)E_x \times \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} && (9.79)\\
&= \gamma q\left(1 - \frac{Vv}{c^2}\right)E_x \times \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} && (9.80)\\
&= \gamma qE_x(v - V) && (9.81)\\
&= c\gamma\left(\frac{qE_x \cdot v}{c} - \frac{V}{c}qE_x\right) && (9.82)\\
&= c\gamma\left(\frac{w}{c} - \frac{V}{c}F_x\right) && (9.83)
\end{aligned}$$

となります。

以上の計算から、$f^\mu = (\frac{w}{c}, \overrightarrow{\mathrm{F}})$ が四元ベクトルとして変換することが分かりました。

ここまでで、電磁場に関わる諸量、電荷・電流、電場・磁場、ポテンシャル、そして力・仕事率がそれぞれどのようにローレンツ変換によって変換を受けるのかを考察してきました。そしてそのほとんどが四元ベクトルとして変換を

受けることがわかりました。しかし、電場・磁場だけは今までとは様子が違います。またポテンシャルについての式は共変形式になりましたが、マクスウェル方程式そのものはまだ直接共変形式にはできていません。その意味を考えるためにも、先の議論のためにも、そして解析力学との融合のためにも、もう一歩進んで、すべての法則・関係を共変形式で書き直す必要があります。次章では、マクスウェル方程式やローレンツ力の式を共変形式で書き直すことによって、その意味をもう少し深く考察していくことにしましょう。

まとめ

■電磁場における四元ベクトル　この章の議論によって、電磁気学に現れる諸量のうち、次のような四元ベクトルが明らかになりました。

1. 物質に付随するソース（電荷・電流密度）
$$j^\mu = (\rho c, \overrightarrow{\mathrm{j}})$$
2. 電磁場のポテンシャル（電荷・電流密度）
$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \overrightarrow{\mathrm{A}})$$
3. ローレンツ力（電荷・電流密度）
$$F^\mu = (\frac{w}{c}, \overrightarrow{\mathrm{F}})$$

■共変形式による電磁場の法則　また、いくつかの法則は共変形式になりました。

1. 電荷保存の法則
$$\partial_\mu j^\mu = 0$$
2. ソースとポテンシャルの関係式（ローレンツ・ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ のもとで）
$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

■相対論における電場・磁場の変換　電場・磁場の変換法則は、ローレンツ変換とは少し違いました。

$$\frac{E'_x}{c} = \frac{E_x}{c}$$
$$\frac{E'_y}{c} = \gamma\left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z\right)$$
$$\frac{E'_z}{c} = \gamma\left(\frac{E_z}{c} + \beta B_y\right)$$
$$B'_x = B_x$$
$$B'_y = \gamma\left(B_y - \beta\frac{E_z}{c}\right)$$
$$B'_z = \gamma\left(B_z + \beta\frac{E_y}{c}\right)$$